Feuille d'Exercices 3

Intégration

Exercice 3.1.— Intégrales de Wallis. On considère la suite I_n définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n. En déduire $\int_0^1 (x^2-1)^n dx$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$.
4. Calculer $(n+1)I_n I_{n+1}$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 3.2.— Formule de Stirling. On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

1. On pose $\nu_n = \ln(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $\nu_{n+1} - \nu_n$, démontrer que la suite $(\nu_n)_n$ converge. En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine limite l.
2. À l'aide de la question **4** de l'exercice précédent, démontrer que $l = \sqrt{2\pi}$.
3. En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 3.3.— Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, positive et $M = \sup f(x)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

Exercice 3.4.— On considère la suite de fonctions en escalier $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{n}$ et $g_n(x) = n$ si $x < \frac{1}{n}$.
1. Existe-t-il une fonction bornée définie sur $[0,1]$ qui soit limite de cette suite ?
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 f(x) g_n(x) dx$, où f est une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3.5.— Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute application $g \in E([a,b])$ on a $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 3.6.— Soit f une fonction réglée sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que l'ensemble de ses points de discontinuité est dénombrable.

Exercice 3.7.— Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(i) $a(t) = (t+1)e^{2t}$, (ii) $b(t) = t^2 e^{t^3}$, (iii) $c(t) = e^{2t}\cos(3t)$, (iv) $d(t) = \frac{1}{t(1+t^4)}$,
(v) $e(t) = \frac{1}{t^2(t^2+1)^2}$, (vi) $f(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$, (vii) $g(t) = \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)}$, (viii) $h(t) = \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}$,
(ix) $i(t) = \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}(t)}$, (x) $j(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, (xi) $k(t) = t\sqrt[n]{1+t}$, (xii) $l(t) = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}$.

Exercice 3.8.— Soit $f \in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variables que l'on a

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx.$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Exercice 3.9.— Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $I(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}dt$.

1. **a.** Déterminer la valeur de $I(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction I en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la valeur de $J(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction J en $+\infty$.

Exercice 3.10.— Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)+1}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f et en déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est positive sur $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$, et négative sur $[0,1]$.

4. Pour quelles valeurs de x la fonction f s'annule-t-elle ?

Exercice 3.11.— Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(i) $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}dt$; (iii) $\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}dt$; (iv) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$; (v) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}dt$;
(vi) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}dt$; (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}dt$; (viii) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)^2}$; (ix) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}dt$;
(x) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; (xi) $\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.12.— Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

(i) $\int_0^\infty \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$; (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$; (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2(t)}$; (iv) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$; (v) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$;
(vi) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; (vii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2+1})^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.13.— Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt$.

2. On suppose que $f(b) \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)^2 \ln(t-a)}{(b-t)^2}dt$.

Exercice 3.14.— Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est dérivable en 0.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente.

2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}dt$ est divergente.

Exercice 3.15.— Soit $I = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}dt$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

3. En déduire que

$$I = 2\pi.$$

Exercice 3.16.— **1.** Montrer que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ sont convergentes.

2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente, et que sa valeur est égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = 0.$$

3. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variables approprié, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2a}\ln(a).$$

Exercice 3.17.— **1.** Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est convergente.

3. Soit $\forall x \in [1,+\infty[, I(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$.

a. Montrer que la fonction I est définie et de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, et qu'elle a une limite en $+\infty$.

b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

Remarque. La valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est* $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.18.— Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi t) - \arctan(t)}{t} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. **a.** Soit $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{a} \frac{\arctan(\pi t) - \arctan(t)}{t} dt$. Montrer que

$$\forall a > 0, I(a) = \int_a^{\pi a} \frac{\arctan(t) - \frac{\pi}{2}}{t} dt + \frac{\pi}{2} \ln(\pi).$$

b. Montrer que la fontion $t \mapsto \frac{\arctan(t) - \frac{\pi}{2}}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

c. En déduire que

$$I = \frac{\pi}{2} \ln(\pi).$$

Exercice 3.19.— Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma(1) = 1.$$

2. Montrer que

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.20.— Soit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Remarque. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
