Université Pierre et Marie Curie . LM 260. année 2012-2013.

Devoir n°3.

Exercice I.

1) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt$ est convergente pour $x \geq -1$.

On note $g(x)$ sa valeur .

Indication : on pourra distinguer les cas $x=-1$ et $x>-1$.

2) a) Montrer que la fonction $x \mapsto g(x)$ est continue sur $[-1,+\infty[$.

b) Montrer que la fonction $x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$

et qu'on a pour $x>-1$:

$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+x\cos t}.$$

3). Montrer que la fonction $x \mapsto g'(x)$ est décroissante sur $]-1,+\infty[$ et qu'on a :

$\forall x \in]-1,0] \quad \forall \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g'(x) \geq \frac{\alpha}{1+x\cos\alpha}$

En déduire : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} g'(x) = +\infty$.

4).Montrer qu'on a pour $|x|<1$ $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = (-1)^n \int_0^1 (\cos t)^n\,dt$. Démontrer que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. Indication : utiliser le résultat de la question précédente.

5). Montrer que pour $|x|<1$ on a $g'(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$. Indication : dans l'expression de $g'(x)$ sous forme d'intégrale, commencer par faire le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$.

6). En déduire une expression simple pour $g(x)$, pour $|x|<1$;

puis en déduire les valeurs de $g(1)$ et de $g(-1)$.

Exercice II.

1.Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{n(n^2-1)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; on note $f(x)$ sa somme.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de $f'(0)$.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,2\pi[$.

Indication : on utilisera le théorème d'Abel.

4.Montrer que pour $x \in \left]0, 2\pi\right[$ on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$. Indication : on pourra appliquer le théorème de Dirichlet à une fonction 2π -périodique bien choisie.

5. a) Montrer que sur $\left]0, 2\pi\right[$ f est solution de l'équation différentielle : $y'' + y = \frac{x-\pi}{2} + \sin x$.

b) Il s'agit dans cette question de résoudre l'équation différentielle ci dessus sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de trouver toutes les solutions de cette équation.
Pour cela on rappelle que la solution générale d'une telle équation est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre : $y'' + y = 0$.
On rappelle que la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$ est une fonction de la forme $y(x) = a\cos x + b\sin x$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques (voir un cours de 1ere année).
Pour trouver une solution particulière de l'équation $y'' + y = \frac{x-\pi}{2} + \sin x$, on ajoutera une solution particulière de l'équation $y'' + y = \frac{x-\pi}{2}$ (facile à trouver) et une solution particulière de l'équation $y'' + y = \sin x$. Pour cette dernière équation on cherchera une solution sous la forme $y(x) = x \times (A\cos x + B\sin x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$

6. a) Trouver une expression simple pour $f(x)$, pour $x \in \left]0, 2\pi\right[$
Indication : on utilisera les résultats des questions précédentes , et on précisera la valeur des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ en considérant les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
b) Trouver une expression simple pour $f(x)$, pour $x \in \left]-2\pi, 0\right[$.
c) Montrer que la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.