Université Pierre et Marie Curie . LM 260. année 2012-2013. Corrigé du devoir n°3.

Exercice I. 1) Etudions d'abord le cas $x>-1$. Si $x\geq 0$, alors pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $1+x\cos t\geq 1$; si $x\in\left]-1,0\right]$ alors pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $x\cos t\geq x$ et donc $1+x\cos t\geq 1+x>0$; donc dans tous les cas , si $x>-1$, alors la fonction $t\mapsto 1+x\cos t$ est strictement positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et donc la fonction $t\mapsto\ln\left(1+x\cos t\right)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs le dénominateur s'annule en $t=\frac{\pi}{2}$ mais on a : $\frac{\ln\left(1+x\cos t\right)}{\cos t}\underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim}\frac{x\cos t}{\cos t}=x$, donc la fonction qu'on intègre est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale est convergente.

Si $x=-1$, alors la fonction qu'on intègre possède une singularité en 0 : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\left(1-\cos t\right)}{\cos t}=-\infty$;

et on a : $\frac{\ln\left(1-\cos t\right)}{\cos t}\underset{t\to 0}{\sim}\ln\left(1-\cos t\right)$ qui est de signe constant au voisinage de 0 (négatif) ; d'après le théorème sur les équivalents il suffit donc de prouver que la fonction $t\mapsto\ln\left(1-\cos t\right)$ est intégrable en 0 ; or on a :

$\cos t=1-\frac{t^2}{2}\left(1+\varepsilon(t)\right)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$ d'où $\ln\left(1-\cos t\right)=\ln\left(\frac{t^2\left(1+\varepsilon(t)\right)}{2}\right)=2\ln t+\ln\left(\frac{1+\varepsilon(t)}{2}\right)$; la fonction $t\mapsto\ln t$ est intégrable en 0 (voir cours ou TD); et la fonction $t\mapsto\ln\left(\frac{1+\varepsilon(t)}{2}\right)$ est continue au voisinage de 0 donc intégrable CQFD.

2) On va utiliser le théorème N°8.2.1 du cours (page 152). La fonction $(t,x)\mapsto\frac{\ln\left(1+x\cos t\right)}{\cos t}$ est continue en chacune des variables pour $(t,x)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[-1,+\infty\right[$. Pour trouver une majoration par une fonction intégrable qui ne dépend pas de x, on va distinguer le cas $x\in\left[-1,0\right]$ et $x\in\left[0,+\infty\right[$.

Pour $x\in\left[-1,0\right]$ et $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $1\geq 1+x\cos t\geq 1-\cos t$ et donc $0\geq\ln\left(1+x\cos t\right)\geq\ln\left(1-\cos t\right)$

d'où $\left|\ln\left(1+x\cos t\right)\right|\leq\left|\ln\left(1-\cos t\right)\right|$ et $\left|\frac{\ln\left(1+x\cos t\right)}{\cos t}\right|\leq\left|\frac{\ln\left(1-\cos t\right)}{\cos t}\right|$ qui est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ comme on l'a montré à la question 1) .

On en déduit en appliquant le théorème que la fonction $x\mapsto g(x)$ est continue sur $\left[-1,0\right]$.

Pour prouver la continuité sur $\left[0,+\infty\right[$ on va appliquer le théorème sur un intervalle $\left[0,A\right]$ avec $A>0$ arbitraire.

Pour $x\in\left[0,A\right]$ et $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $1\leq 1+x\cos t\leq 1+A\cos t$ et donc $0\leq\ln\left(1+x\cos t\right)\leq\ln\left(1+A\cos t\right)$, d'où

$\left|\frac{\ln\left(1+x\cos t\right)}{\cos t}\right|\leq\left|\frac{\ln\left(1+A\cos t\right)}{\cos t}\right|$ qui est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

On en déduit par le théorème que la fonction $x\mapsto g(x)$ est continue sur $\left[0,A\right]$ et cela pour tout $A>0$, donc elle est continue sur $\left[0,+\infty\right[$. On a donc prouvé la continuité de la fonction $x\mapsto g(x)$ sur $\left[-1,+\infty\right[$.

2.b) Pour la dérivabilité on utilise le théorème 8.3.1. On a : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\right)=\frac{1}{1+x\cos t}$; on a pour $x\in[-1,+\infty[$ et $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$: $1+x\cos t\geq 1-\cos t>0$ et donc $0\leq\frac{1}{1+x\cos t}\leq\frac{1}{1-\cos t}$ mais cette dernière fonction n'est pas intégrable en 0 puisque $\frac{1}{1-\cos t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^2/2}$ qui n'est pas intégrable en 0 ; pour pouvoir appliquer le théorème, il faut donc restreindre l'intervalle où varie x ; soit $a>-1$, quelconque ; pour $x\in[a,+\infty[$ et $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $1+x\cos t\geq 1+a\cos t>0$ et donc $0\leq\frac{1}{1+x\cos t}\leq\frac{1}{1+a\cos t}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (puisque le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc la fonction est continue).

Par ailleurs la fonction $(t,x)\mapsto\frac{1}{1+x\cos t}$ est continue en chacune des variables pour $(t,x)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\times[a,+\infty[$

On peut donc appliquer le théorème , on en déduit que $x\mapsto g(x)$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et on a :

$g'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+x\cos t}$; comme a est quelconque ($a>-1$) , on en déduit la dérivabilité de g et la validité de l'égalité sur $]-1,+\infty[$.

3) Soit $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $x_1\geq x_2>-1$, on a pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $1+x_1\cos t\geq 1+x_2\cos t>0$ d'où $0\leq\frac{1}{1+x_1\cos t}\leq\frac{1}{1+x_2\cos t}$; la décroissance de g' en résulte , par intégration .

Soit $x\in]-1,0]$ et $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$; on a pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $1+x\cos t>0$ d'où $\frac{1}{1+x\cos t}>0$, et pour $t\in[0,\alpha]$ $\cos t\geq\cos\alpha$ d'où $0<1+x\cos t\leq 1+x\cos\alpha$ (puisque $x\leq 0$) d'où $\frac{1}{1+x\cos t}\geq\frac{1}{1+x\cos\alpha}>0$; d'où

$g'(x)\geq\int_0^{\alpha}\frac{dt}{1+x\cos t}\geq\int_0^{\alpha}\frac{dt}{1+x\cos\alpha}=\frac{\alpha}{1+x\cos\alpha}$.

Puisque g' est décroissante sur $]-1,+\infty[$ on a : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g'(x)$ existe , sa valeur étant soit un nombre réel, soit $+\infty$.

L'inégalité ci dessus entraîne alors , en passant à la limite quand x tend vers -1 :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g'(x)\geq\frac{\alpha}{1-\cos\alpha}$; et cette inégalité étant vraie pour tout $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit en faisant tendre α vers 0 : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g'(x)\geq\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-\cos\alpha}=+\infty$ (car $\frac{\alpha}{1-\cos\alpha}\underset{\alpha\to 0}{\sim}\frac{\alpha}{\alpha^2/2}=\frac{2}{\alpha}\underset{\alpha\to 0}{\to}+\infty$)

4) Pour $|x|<1$ et pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: $\frac{1}{1+x\cos t}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(\cos t)^n$ et à x fixé la convergence de la série est normale en t puisqu'on a : $\left|(-1)^n x^n(\cos t)^n\right|\leq x^n$ et $|x|<1$ et donc $\sum\limits_{n\geq 0}|x|^n$ converge.

D'après le théorème 4.5.1 on peut donc échanger la sommation et l'intégration et on obtient :

$$g'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n(\cos t)^n\,dt=\sum_{n\geq 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n x^n(\cos t)^n\,dt=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$$

Cette série converge pour $|x|<1$ donc son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 . Par ailleurs on a d'après la question précédente $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g'(x)=+\infty$; donc le rayon de convergence est au plus 1 (s'il était strictement plus grand que 1 la fonction somme de la série serait continue au point -1) . Donc le rayon est 1.

5) Effectuons le changement de variable indiqué ; on a $dt=\dfrac{2du}{1+u^2}$ et $\cos t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ d'où , en tenant compte de ce que $1-x>0$ et $1+x>0$ (puisque $|x|<1$) :

$$g'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+x\cos t}=\int_0^1\frac{2du}{\left(1+u^2\right)\left(1+x\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\right)}=\int_0^1\frac{2du}{u^2(1-x)+1+x}=\frac{1}{1+x}\int_0^1\frac{2du}{\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{2dv}{v^2+1}=\frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\quad \text{(en ayant posé } v=u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\text{)}$$

Il reste à prouver que $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=\arccos x$ ce qui se montre facilement en posant $\theta=\arccos x$;

θ est bien défini et on a $\theta\in\left]0,\pi\right[$ car $|x|<1$.

On a alors : $x=\cos\theta$ et $\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\tan^2\dfrac{\theta}{2}$ d'où puisque $\theta\in\left]0,\pi\right[$ et donc $\tan\dfrac{\theta}{2}>0$,

$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$ et donc $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)=2\arctan\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)=\theta=\arccos x$.

6) On a alors pour $|x|<1$, en tenant compte de ce que $g(0)=0$:

$$g(x)=\int_0^x g'(t)dt=\int_0^x\frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left[\frac{-1}{2}(\arccos t)^2\right]_0^x=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos x)^2$$

Grâce à la continuité de la fonction $x\mapsto g(x)$ $\left[-1,+\infty\right[$ on a :

$$g(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}g(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos x)^2\right)=\frac{\pi^2}{8}\quad\text{et}$$

$$g(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos x)^2\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{3\pi^2}{8}$$

Exercice II. 1) On a $\left|\dfrac{\sin nx}{n\left(n^2-1\right)}\right|\le\dfrac{1}{n\left(n^2-1\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente ; et la convergence normale de la série proposée en résulte.

2) La continuité de f résulte de l'application de la proposition 4.2.10 et du théorème 4.3.3 .
Pour la dérivabilité on utilise le théorème 4.4.5.

On a $\left(\dfrac{\sin nx}{n\left(n^2-1\right)}\right)'=\dfrac{\cos nx}{n^2-1}$ et $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2-1}\right|\le\dfrac{1}{n^2-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$ et la convergence normale de la série des dérivées en résulte , d'où la dérivabilité de f en appliquant le théorème , et on a pour $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\displaystyle\sum_{n\ge2}\frac{\cos nx}{n^2-1}$ d'où , en se ramenant à une somme finie qui se calcule par « téléscopage » :

$$f'(0)=\sum_{n\ge2}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n\ge2}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\sum_{n\ge2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{3}{4}$$

3) Pour montrer que f est deux fois dérivable on considère la série des dérivées secondes :

$\displaystyle\sum_{n\ge2}\frac{-n\sin nx}{n^2-1}$. Cette série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a $\displaystyle\operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{-n\sin nx}{n^2-1}\right|=\frac{n}{n^2-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.

Soit $\varepsilon>0$; on va utiliser le théorème d'Abel pour montrer qu'elle converge uniformément sur $\left[\varepsilon,2\pi-\varepsilon\right]$

ce qui permettra d'appliquer ensuite le théorème 4.4.5.

La suite $\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante vers 0 et la suite $\left(-\sin nx\right)_{n\geq 2}$ satisfait l'autre hypothèse du théorème d'Abel ; en effet on a , pour $N>2$ et pour $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$:

$$\left|\sum_{n=2}^{N}-\sin nx\right|=\left|-\operatorname{Im}\sum_{n=2}^{N}e^{inx}\right|\leq\left|\sum_{n=2}^{N}e^{inx}\right|=\left|e^{2ix}\frac{1-e^{i(N-1)x}}{1-e^{ix}}\right|\leq\left|\frac{2}{1-e^{ix}}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}}\right|\leq\left|\frac{2}{\sin x}\right|\leq\frac{2}{\sin\varepsilon}$$

Le théorème d'Abel (n°2.5.1) nous permet d'affirmer que la série converge et qu'on a la majoration du reste : $\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\dfrac{-n\sin nx}{n^2-1}\right|\leq 2\dfrac{N}{N^2-1}\times\dfrac{2}{\sin\varepsilon}$. Ainsi le reste de la série est majorée par une quantité qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini et qui ne dépend pas de x . On a donc convergence uniforme de la série sur $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$. On en déduit par le théorème 4.4.5 que f est deux fois dérivable sur $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ et que pour $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ on a $f''(x)=\sum_{n\geq 2}\dfrac{-n\sin nx}{n^2-1}$. Et ε étant quelconque (strictement positif) on en déduit la dérivabilité seconde de f et la validité de l'égalité ci dessus sur $]0,2\pi[$.

4). Il suffit d'appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction 2π périodique qui vaut 0 en 0 et $\dfrac{\pi-x}{2}$ sur $]0,2\pi[$.
Cette fonction est impaire et le calcul des coefficients de Fourier et l'application du théorème donnent le résultat.

5) On vérifie que $x\mapsto\dfrac{x-\pi}{2}$ est solution de $y''+y=\dfrac{x-\pi}{2}$ et que $x\mapsto-\dfrac{1}{2}x\cos x$ est solution de $y''+y=\sin x$.

On en déduit que la solution générale de $y''+y=\dfrac{x-\pi}{2}+\sin x$ est de la forme:

$x\mapsto\dfrac{x-\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x\cos x+a\cos x+b\sin x$.

6)a). On a pour pour $x\in\,]0,2\pi[$, en tenant compte des résultats des questions 3) et 4) :

$$f''(x)+f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}-\frac{n\sin nx}{n^2-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n\left(n^2-1\right)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-\sin nx}{n}=\sin x-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\sin x-\frac{\pi-x}{2}=\frac{x-\pi}{2}+\sin x\ .$$

Et donc f est solution dans l'intervalle $]0,2\pi[$ de l'équation différentielle étudiée ci dessus .

On a donc $f(x)=\dfrac{x-\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x\cos x+a\cos x+b\sin x$ avec a,b des nombres à déterminer.

En dérivant on obtient , pour $x\in\,]0,2\pi[$ $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x-a\sin x+b\cos x$

en faisant tendre x vers 0 , on obtient : $f(0)=0=-\dfrac{\pi}{2}+a$ et $f'(0)=\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+b$. D'où $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $b=\dfrac{3}{4}$. D'où , pour $x\in\,]0,2\pi[$: $f(x)=\dfrac{x-\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{\pi}{2}\cos x+\dfrac{3}{4}\sin x$.

b) On remarque que f est impaire ; on a donc pour $x\in\,]-2\pi,0[$ (c'est-à-dire pour $-x\in\,]0,2\pi[$) :

$$f(x)=-f(-x)=-\left(\frac{-x-\pi}{2}+\frac{1}{2}x\cos x+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{3}{4}\sin x\right)=\frac{x+\pi}{2}-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{\pi}{2}\cos x+\frac{3}{4}\sin x.$$

c). On a pour $x\in\,]0,2\pi[$ $f''(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x-\dfrac{\pi}{2}\cos x-\dfrac{3}{4}\sin x$ et pour $x\in\,]-2\pi,0[$ $f''(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{\pi}{2}\cos x-\dfrac{3}{4}\sin x$. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f''(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f''(x)=\dfrac{\pi}{2}$

Il en résulte d'après le théorème des accroissements finis que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 .