Université Paris VI **LM260 - Séries et intégrales**
Année 2012-2013

Devoir maison n° 2

Intégrales généralisées et suites de fonctions

Exercice 1
Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, telle que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))dx$ converge.
1. Montrer que : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 0 \leq xf(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$.
2. À l'aide de **1.**, montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
3. Montrer que pour tout $y \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^y x(f(x)-f(x+1))dx = \int_1^2 xf(x)dx - \int_y^{y+1} xf(x)dx + \int_2^{y+1} f(x)dx.$$

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))dx$ converge.

Exercice 2
Étudier, selon les valeurs des réels a et b, la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)}.$$

On distinguera l'étude en 0 et l'étude en $+\infty$, et on donnera une représentation graphique des couples de réels (a,b) correspondant à la convergence de l'intégrale généralisée.

Exercice 3
Soit (f_n) la suite de fonction définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n, & \text{si } x \in [0,n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction e^{-x}.
2. **a.** Soit, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = xe^{-x}$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$|h(x)| \leq e^{-1}.$$

b. Pour $n > 1$, on pose

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - (1-\frac{x}{n})^n, & \text{si } x \in [0,n], \\ e^{-x}, & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in [0,n[$, $g_n'(x) = e^{-x}h_n(x)$, avec

$$h_n(x) = -1 + e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

c. Calculer $h_n'(x)$, pour tout $x \in [0,n[$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in]1,n[$ tel que

$$g_n'(\alpha_n) = 0; \qquad \forall x \in [0,\alpha_n[,\ g_n'(x) > 0; \qquad \forall x \in]\alpha_n,n[,\ g_n'(x) < 0.$$

d. Montrer que $g_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ et donner le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}^+$.
e. En déduire que (f_n) converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$.