Corrigé du devoir maison n° 2

Exercice 1

1) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on a pour $x \geq 2$,

$$0 \leq xf(x) = 2(x - \frac{x}{2})f(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt.$$

2) Par la relation de Chasles, $2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt = 2\left(\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t)dt - \int_{x}^{+\infty} f(t)dt\right)$. Comme f est intégrable sur $[1,+\infty[$, la quantité $\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} f(t)dt - \int_{x}^{+\infty} f(t)dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3) La fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $y \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\int_1^y x(f(x) - f(x+1))dx &= \int_1^y xf(x)dx - \int_1^y xf(x+1)dx \\
&= \int_1^y xf(x)dx - \int_2^{y+1} (x-1)f(x)dx \\
&= \int_1^y xf(x)dx - \int_2^{y+1} xf(x)dx + \int_2^{y+1} f(x)dx \\
&= \int_1^2 xf(x)dx - \int_y^{y+1} xf(x)dx + \int_2^{y+1} f(x)dx.
\end{aligned}$$

4) On a $0 \leq \int_y^{y+1} xf(x)dx \leq (y+1-y)(y+1)f(y) \leq 2yf(y)$. D'après 2), cette dernière expression tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Donc quand y tend vers $+\infty$, $\int_1^y x(f(x) - f(x+1))dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx$. Ceci prouve bien que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1))dx$ converge et

$$\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1))dx = \int_1^2 xf(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx.$$

Exercice 2

Pour tous couples de réels (a,b), la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Étude en 0 :

- Si $b > 0$, $f(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^a}$ donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$.
- Si $b = 0$, $f(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{2x^a}$ donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$.
- Si $b < 0$, $f(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^{a+b}}$ donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

Étude en $+\infty$:

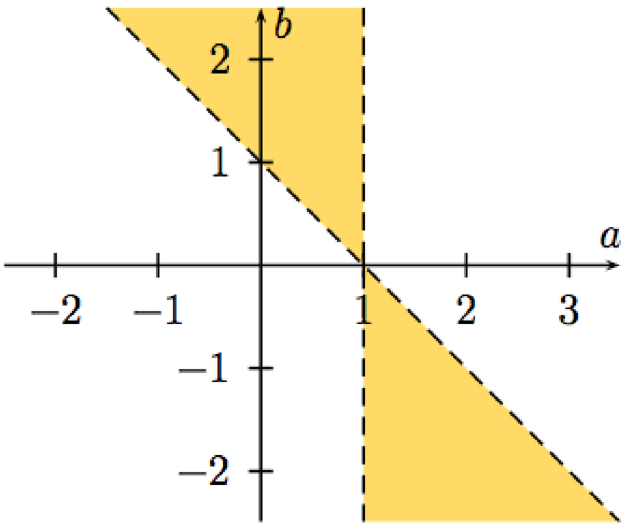
- Si $b > 0$, $f(x) \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{a+b}}$ donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$.
- Si $b = 0$, $f(x) \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^a}$ donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.
- Si $b < 0$, $f(x) \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^a}$ donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$\big[(b \geq 0$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a + b < 1)\big]$ et $\big[(b > 0$ et $a + b > 1)$ ou $(b \leq 0$ et $a > 1)\big]$,

ce qui est équivalent à $(b > 0$ et $a + b > 1$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a > 1$ et $a + b < 1)$.

On peut représenter graphiquement l'ensemble des solutions :



Exercice 3

1) On cherche la limite de $f_n(x)$ quand $n \to +\infty$, à x fixé. On peut donc supposer que quand x fixé dans $[0, +\infty[$, $n \geq x$. Donc

$$f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}.$$

Or $\ln(1-u) = -u + \underset{u \to 0}{o}(u)$ et $u = \dfrac{x}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Et donc quelque soit $x > 0$, $e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} \to e^{-x}$ quand $n \to +\infty$ et $x \neq 0$.
De plus si $x = 0$, $f_n(0) = 1 = e^{-0}$.
Donc $f_n(x) \overset{CVS}{\to} e^{-x}$ quand $n \to +\infty$ quelque soit $x \in [0, +\infty[$.

2.a) h est C^∞ sur $[0, +\infty[$ et quelque soit $x \geq 0$

$$h'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

On fait un tableau de variation de h et on trouve que quelque soit $x \geq 0$ $|h(x)| \leq e^{-1}$.
b) g_n est C^∞ sur $[0, n[$ et quelque soit $x \in [0, n[$,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= -e^{-x} - n(-\frac{1}{n})(1 - \frac{x}{n})^{n-1}, \\ &= e^{-x}(-1 + e^x(1 - \frac{x}{n})^{n-1}), \\ &= e^{-x} h_n(x). \end{aligned}$$

c) h_n est C^∞ sur $[0, n[$ et quelque soit $x \in [0, n[$,

$$\begin{aligned} h_n'(x) &= e^x((1 - \frac{x}{n})^{n-1} - \frac{n-1}{n}(1 - \frac{x}{n})^{n-2}), \\ &= e^x(1 - \frac{x}{n})^{n-2}\frac{1-x}{n}. \end{aligned}$$

Donc $h_n'(x) = \dfrac{e^x(1 - \frac{x}{n})^{n-2}}{n}(1 - x)$ quelque soit $x \in [0, n[$. On a montrer que

$$g_n'(x) = \begin{cases} e^{-x} h_n(x), & \text{si } x \in [0, n[, \\ -e^{-x} & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Attention g_n est bien continue en n mais pas dérivable.
Donc pour connaitre le signe de g_n' il faut connaitre le signe de h_n. En faisant un tableau de variation pour

h_n, on trouve que h_n est croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,n[$ et $h_n(0)=0$, $h_n(1)>0$ dés que $n>1$, $h_n(n)=-1$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on voit qu'il existe un unique $\alpha_n \in]1,n[$ tel que $h_n(\alpha_n)=0$ et donc

$$\begin{cases} h_n > 0 & \text{sur }]0,\alpha_n[, \\ h_n(\alpha_n) = 0, & \\ h_n < 0 & \text{sur }]\alpha_n, n[. \end{cases}$$

Et donc on a bien

$$\begin{cases} g_n'(x) > 0 & \text{si } x \in]0,\alpha_n[, \\ g_n'(\alpha_n) = 0, & \\ g_n'(x) < 0 & \text{si } x \in]\alpha_n, +\infty[\setminus\{n\}. \end{cases}$$

d) On ne connait pas la valeur de α_n. En effet α_n est défini de manière implicite par

$$\begin{aligned} h_n(\alpha_n) = 0 &\iff 1 - e^{\alpha_n}(1-\frac{\alpha_n}{n})^{n-1} = 0, \\ &\iff e^{\alpha_n}(1-\frac{\alpha_n}{n})^{n-1} = 1, \\ &\iff (1-\frac{\alpha_n}{n})^{n-1} = e^{-\alpha_n}, \\ &\iff (1-\frac{\alpha_n}{n})^{n} = e^{-\alpha_n}(1-\frac{\alpha_n}{n}), \\ &\iff (1-\frac{\alpha_n}{n})^{n} - e^{-\alpha_n} = -e^{-\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n}, \\ &\iff -g_n(\alpha_n) = -e^{-\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n}, \end{aligned}$$

et $\alpha_n < n$.
Donc $g_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n}$ et g_n est croissante sur $[0,\alpha_n[$, décroissante sur $[\alpha_n,+\infty[$ et telle que $g_n(0)=0$, $g_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n}\frac{\alpha_n}{n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$.
e) On a que

$$\begin{aligned} \sup_{x\geq 0}|f_n(x) - e^{-x}| &= \sup_{x\geq 0} g_n(x), \\ &= \frac{\alpha_n e^{-\alpha_n}}{n}, \\ &= \frac{h(\alpha_n)}{n}, \\ &\leq \frac{1}{e^1 \times n}, \\ &\to 0 \text{ as } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Et donc $f_n \overset{CVU}{\to} e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

On peut calculer la valeur de l'inégrale généralisée, de deux manières. Soit en appliquant directement un théorème du cours, mais attention ici l'intégrale n'est pas calculée sur un segment, il y a donc des hypothèses supplémentaires à vérifier.

- f_n converge vers f uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$, avec $f(x) = e^{-x}$.
- $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ quelque soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est finie. (hypothèses supplémentaires à vérifier dans le cas des intégrales généralisées).

Donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \to \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$ quand $n \to +\infty$.
Sinon on peut calculer directement $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f_n(x)dx,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^A f_n(x)dx &= \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx, \text{ pour } A \text{ suffisamment grand,} \\
&= \left[-(1-\frac{x}{n})^{n+1}\frac{n}{n+1}\right]_0^n, \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Et donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f_n(x)dx = \dfrac{n}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$.