# Devoir maison n°1
# Suites et séries numériques

**Exercice 1**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n} - 1$.

1) Montrer que $(u_n)$ est bien définie et tend vers 0.

2) Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

3) En déduire un équivalent simple de $u_n$. (Indication : on pourra utiliser Césaro).

4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ? Et celle de $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ ?

5) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ ?

**Exercice 2 :**

A) Soit $n_0$ un entier naturel et soit $f$ une fonction positive, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

A1) Montrer que $\forall n \geq n_0, \quad f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt$ et $\forall n \geq n_0 + 1, \quad f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$.

A2) On pose $U_n = \displaystyle\sum_{n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)dt$. Montrer que la suite $(U_n)$ est convergente.

A3) On pose $V_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ et $a_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \cdots + \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln(n)^2}{2}$. Montrer que les suites $(V_n)$ et $(a_n)$ sont convergentes.

B) On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

B1) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln 2 \left( \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$.

B2) En déduire une expression de $S_{2n}$ où figure $a_n, a_{2n}$ et $V_n$.

C1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

C2) Notons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ la somme de la série de terme général $(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$. Calculer $S$ en fonction de $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$.

**Exercice 3 :**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs réelles continue sur $[0, 1]$ et telle que $f(0) \neq 0$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n)dt.$$

1) On pose $a_n = \mathrm{Sup}_{t\in[0,1/n]} \mid f(t) - f(0) \mid$ . Montrer que la suite $(a_n)$ tend vers 0.

2) En déduire un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

3) Etudier la convergence de la série de terme général $u_n$. On discutera suivant les valeurs de $\alpha$.