C.N.E.D. 2011-2012 LM260

Corrigé du devoir 1

Exercice 1. Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose $u_n = n^a(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ et $v_n = n^a(\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n})$. Si $\epsilon \in \{-1, 1\}$,

$$(n+\epsilon)^{1/2} - n^{1/2} = n^{1/2}((1+\epsilon/n)^{1/2} - 1) = n^{1/2}(\epsilon/(2n) + O(1/n^2)), \quad (n \to +\infty).$$

En particulier $u_n \sim n^{a-1/2}/2$ et $v_n \sim (-1)^n n^{a-1/2}/2$. Par comparaison avec une série de Riemann, *la série à termes positifs* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge si et seulement si* $a < -1/2$.

Si $a \geq 1/2$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge car v_n ne tend pas vers 0. Si $a < 1/2$, on écrit

$$v_n = v_n' + v_n'' \quad \text{avec} \quad v_n' = (-1)^n n^{a-1/2}/2, \; v_n'' = O(1/n^{a-3/2}).$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente d'après le théorème spécial des séries alternées car $|v_n'|$ décroît vers 0, et le second est le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente, car $3/2 - a > 1$.

En conclusion, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *converge si et seulement si* $a < 1/2$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \ln n - \sum_{k=1}^{n} 1/k$. On a

$$a_n := u_{n+1} - u_n = \ln(1+1/n) - 1/(n+1) = 1/n - 1/(n+1) + O(1/n^2) = O(1/n^2).$$

Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente donc convergente.

Comme $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, *il en résulte que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est convergente.*

Exercice 3. Soit $\{u_n\}_{n\geq 1}$ et $\{v_n\}_{n\geq 1}$ des séries à termes strictement positifs. On les suppose divergentes. On note $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_n$ les suites des sommes partielles associées. Elles ont pour limites $+\infty$.

On suppose $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'équivalence, il existe un entier $N = N(\epsilon)$ tel que

$$k > N \Rightarrow 1 - \epsilon < \frac{u_k}{v_k} < 1 + \epsilon,$$

ce qui s'écrit aussi $(1-\epsilon)v_k < u_k < (1+\epsilon)u_k$. En sommant ces inégalités membre à membre de $k = N+1$ à $k = n$ avec $n > N$, on obtient :

$$n > N, \qquad (1-\epsilon)(V_n - V_N) < U_n - U_N < (1+\epsilon)(V_n - V_N),$$

et donc $(1-\epsilon)V_n - V_N < U_n < (1+\epsilon)V_n + U_N$, puis en divisant par V_n :

$$n > N, \qquad (1-\epsilon) - \frac{V_N}{V_n} < \frac{U_n}{V_n} < (1+\epsilon) + \frac{U_N}{V_n}.$$

Les nombres $\epsilon > 0$ et $N = N(\epsilon)$ étant fixés, par hypothèse, les suites V_N/V_n et U_N/V_n ont pour limite 0 quand $n \to +\infty$. Il existe donc un entier $N_1 = N_1(\epsilon)$, qu'on peut supposer plus grand que N, tel que les nombres U_N/V_n et V_N/V_n soient majorés par ϵ si $n > N_1$. On obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists N_1 \in \mathbf{N}, \qquad n > N_1 \Rightarrow -2\epsilon < \frac{U_n}{V_n} - 1 < 2\epsilon,$$

autrement dit $U_n/V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: *les suites* U_n *et* V_n *sont équivalentes.*

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = u_n + 1/u_n \text{ si } n \geq 0.$$

1) D'abord, on a $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = u_n + 1/u_n > 0$. On en déduit par récurrence que u_n est strictement positif pour tout $n \geq 0$. Ensuite qu'on a $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc que *la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie, strictement positive et strictement croissante.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. Elle admet donc une limite l, soit un nombre réel soit $+\infty$. Si $l \in \mathbf{R}$, on déduit de la relation de récurrence qu'on a $l + 1/l = 1$, ce qui est impossible. Donc *$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $+\infty$ quand $n \to +\infty$.*

2) On pose $v_n = u_n^2$. On a :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = \frac{1}{u_n}\left(2u_n + \frac{1}{u_n}\right) = 2 + \frac{1}{u_n^2}.$$

On vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 2$.

3) On écrit $v_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1})$.

On applique le résultat de l'exercice précédent à la série divergente de terme général $a_n = v_{n+1} - v_n$ et à la série de terme général $b_n = 2$. Comme $a_n \sim b_n$ quand $n \to +\infty$, on obtient que $v_n/(2n)$ a pour limite 1 donc que $u_n/\sqrt{2n}$ a pour limite 1 quand n tend vers l'infini.

Autrement dit, $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

1) Un changement de variable donne

$$v_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x + n\pi)}{x + n\pi} dx = (-1)^n w_n, \qquad w_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x + n\pi} dx.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est positive, décroissante et tend vers zéro (en effet, w_n est majorée par $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{n\pi} = \frac{1}{n}$).

Compte tenu du théorème spécial des séries alternées, *la série de terme général v_n est convergente.*

Soit $t \in [0, \pi]$. Si x appartient au segment $[n\pi, n\pi + t]$, de longueur t, alors $|\sin x|/x \leq 1/(n\pi)$ donc :

$$t \in [0, \pi], \qquad \left| \int_{n\pi}^{n\pi+t} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \left| \int_{n\pi}^{n\pi+t} \frac{dx}{n\pi} \right| \leq \frac{t}{n\pi} \leq \frac{1}{n}.$$

2) On définit la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sin s}{s} ds.$$

Si $x \in [1, +\infty[$, on écrit $x = m(x)\pi + t(x)$ où $m(x) \in \mathbf{N}$ est la partie entière de x/π et $t(x) \in [0, \pi[$. On a :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \int_\pi^{m(x)\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{m(x)\pi}^{m(x)\pi + t(x)} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Dans le membre de droite, le premier terme est une constante, le deuxième est égal à la somme partielle $\sum_{k=1}^{m(x)-1} v_k$. Quand $x \to +\infty$ (donc $m(x) \to +\infty$), il tend vers la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ de la série convergente de terme général v_k. Le troisième terme tend vers 0 quand $x \to +\infty$ d'après ce qui précède.

On en déduit que la fonction $f(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_1^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$