LM-260
Devoir d'Entrainement

13 novembre 2012

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{argsh(x)}{(1+x^2)^{1/2}}$$

1) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 1, \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

2) Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution notée s, définie et développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence $r > 0$ de cette série entière ?

3) Montrer soigneusement que la fonction $x \mapsto k(x) = f(x) - s(x)$ est nulle sur l'intervalle $]-r, r[$.

En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ et écrire son développement de Taylor.

Problème

On note S_n l'ensemble des *permutations* de $\{1, 2, .., n\}$. On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$. On dit q'une *permutation* $\sigma \in S_n$ est **sans points fixes**, si elle verifie la propriété : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \ \sigma(i) \neq i$. On note D_n l'ensemble des permutations sans points fixes, et d_n le cardinal de D_n.

Le but du problème est de calculer explicitement la valeur de d_n grâce à une série entière.

On va admettre le résultat combinatoire suivant : les d_n verifient les relations :

$$\boxed{\begin{array}{c} d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) \end{array}} \tag{2}$$

Une série entière

On pose $a_n = \frac{d_n}{n!}$. Dans cette partie, on va etudier la serie entière $\sum_n a_n t^n$. On note ρ son rayon de converge et $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sa somme sur $]-\rho, +\rho[$.

1) Montrer que la suite a_n est bornée. En déduire que $\rho \geq 1$.

2) Montrer que la suite a_n verifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + a_n$. En deduire que la fonction f satisfait les equations :

$$f(0) = 1 \tag{3}$$

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad (t-1)f'(t) + tf(t) = 0 \tag{4}$$

Etude d'une fonction

Soit $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}$$

3) Justifer que la fonction g est *développable en série entière* au voisinage de 0.
On notera $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ ce développement, et r son rayon de convergence.

4) Avec l'aide d'un produit de série entière, montrer que $r \geq 1$ et calculer b_n sous la forme d'une somme.

5) Verifier que la fonction g satisfait les equations (3) et (4). En déduire que $f = g$ sur $]-1,1[$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Conclusion

6) En utilisant ce qui précede, donner une expression de d_n sous la forme d'une somme.

7) *(Question bonus)* Vers quoi converge la probabilité qu'une permutation de $\{1,...,n\}$ quelconque n'ai pas de point fixe lorsque $n \to +\infty$?

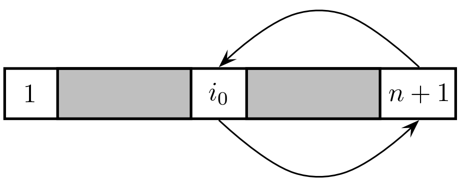
- Fin du sujet -

Complements (Pour la culture, hors programme LM260)

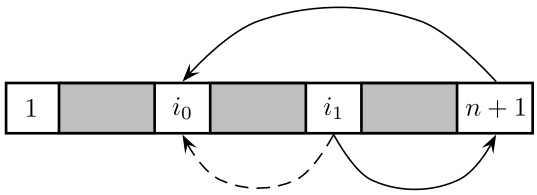
Comment trouve-t-on les relations admises en (2) ?

On choisit σ une permutation de D_{n+1} (c'est à dire, une permutation de $\{1,...,n+1\}$ sans points fixes). On note $i_0 = \sigma(n+1)$, et $i_1 = \sigma^{-1}(n+1)$. On remarque que necessairement $i_0 \neq n+1$ et $i_1 \neq n+1$.

Deux cas peuvent se présenter : soit $i_0 = i_1$, soit $i_0 \neq i_1$. On peut se representer ces cas par les schémas suivants :



cas $i_0 = i_1$



cas $i_0 \neq i_1$

- **cas** $i_0 = i_1$:
  On voit que la restriction de σ à l'ensemble $\{1,...,i_0-1,i_0+1,...n\}$ (partie grisée) est une permutation sans point fixe. On a n choix pour i_0 et d_{n-1} permutations sans point fixe de $\{1,...,i_0-1,i_0+1,...n\}$ donc un total de nd_{n-1} permutations ;
- **cas** $i_0 \neq i_1$: On peut définir une nouvelle permutation de θ de $\{1,...,n\}$ par $\theta(i_1) = i_0$ et $\theta(i) = \sigma(i)$ si $i \neq i_1$ (représenté par la fleche en pointillé). C'est une permutation sans point fixe de $\{1,...,n\}$, donc on a d_n choix. On a n choix pour le i_0. Donc au total il y a nd_n permutation σ possible dans ce cas.

En combinant les deux cas, le nombre total de permutations $\sigma \in D_{n+1}$ est $n(d_n + d_{n-1})$.