LM-260
Devoir d'Entrainement
Correction

13 novembre 2012

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{argsh(x)}{(1+x^2)^{1/2}}$$

1) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 1, \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

Il suffit de savoir la dérivée de $argsh$ et de remplacer dans l'equation.
$argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2) Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution notée s, définie et développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence $r > 0$ de cette série entière ?

On supose que $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (1) et on remplace dans l'equation :
$xs(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$
$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
$x^2 s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$
Par $s(0) = 0$ on a $a_0 = 0$, et par l'equation différentielle :
$a_1 + 2a_2 x + a_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)a_n + n a_{n-1}) x^n = 1$
Par unicité du developpement en série entière, on obtient :
$a_1 = 1$**,** $a_2 = 0$ **et** $\forall n \geq 2,\ (n+1)a_n + n a_{n-1} = 0$**.**
Donc on peut voir que les termes pairs sont nuls, et que les termes impairs verifient :
$a_{2n+1} = -\frac{2n}{2n+1} a_{2n-1}$**.**
Donc $a_{2n+1}/a_{2n-1} \to 1$, par d'Alembert, la série entière $\sum_n a_{2n+1} x^n$ a pour rayon de convergence 1. Donc $s(x) = \sum_n a_{2n+1} x^{2n+1}$ aussi.

3) Montrer soigneusement que la fonction $x \mapsto k(x) = f(x) - s(x)$ est nulle sur l'intervalle $]-r, r[$.

Comme s et f verifient toute les deux l'equation (1), k est solution de :
$(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 0$ **et** $y(0) = 0$
On voit que la fonction nulle est egalement solution de cette equation. Par Cauchy, on a l'unicité de la solution, donc k est la fonction nulle.

En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ et écrire son développement de Taylor.

Comme $f(x) = s(x)$ sur $]-1, 1[$, f est developpable en série entière.
Pour le calcul des coefficients, on utilise $a_{2n+1} = -\frac{2n}{2n+1} a_{2n-1}$. De proche en proche :
$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} a_1 = (-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n+1!}$

Problème

On note S_n l'ensemble des *permutations* de $\{1, 2, .., n\}$. On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$. On dit q'une *permutation* $\sigma \in S_n$ est **sans points fixes**, si elle verifie la propriété : $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \sigma(i) \neq i$. On note D_n l'ensemble des permutations sans points fixes, et d_n le cardinal de D_n.

Le but du problème est de calculer explicitement la valeur de d_n grâce à une série entière.

On va admettre le résultat combinatoire suivant : les d_n verifient les relations :

$$\boxed{\begin{array}{c} d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) \end{array}} \tag{2}$$

Une série entière

On pose $a_n = \frac{d_n}{n!}$. Dans cette partie, on va etudier la serie entière $\sum_n a_n t^n$. On note ρ son rayon de converge et $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sa somme sur $]-\rho, +\rho[$.

1) Montrer que la suite a_n est bornée. En déduire que $\rho \geq 1$.

> **Comme d_n est le cardinal d'un sous-ensemble de l'ensemble des permutations, on a $d_n \leq n!$ c'est à dire $a_n \leq 1$.**
> **Clairement si $|x| < 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ converge absolument (car $|a_n x^n| \leq |x|^n$).**
> **Donc le rayon de convergence est ≥ 1.**

2) Montrer que la suite a_n verifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + a_n$. En deduire que la fonction f satisfait les equations :

$$f(0) = 1 \tag{3}$$

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad (t-1)f'(t) + tf(t) = 0 \tag{4}$$

> **On utilise la définition des d_n pour obtenir la relation entre les a_n :**
> $(n+2)a_{n+2} = \frac{d_{n+2}}{n+1!} = \frac{d_{n+1}+d_n}{n!} = (n+1)a_{n+1} + a_n$
> **Puis,** $f(0) = a_0 = 1$ **et** $(t-1)f'(t) + tf(t) = a_1 + \sum_{n\geq 0}((n+1)a_{n+1} + a_n - (n+2)a_{n+2})t^{n+1} = 0$

Etude d'une fonction

Soit $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}$$

3) Justifer que la fonction g est *développable en série entière* au voisinage de 0.
On notera $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ ce développement, et r son rayon de convergence.

> **Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto 1/(1-t)$ sont développable en série entière en 0.**
> **Donc leur produit aussi.**

4) Avec l'aide d'un produit de série entière, montrer que $r \geq 1$ et calculer b_n sous la forme d'une somme.

> $e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$ **avec un rayon de convergence ∞.**
> $1/(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ **avec un rayon de convergence 1.**
> **Le produit a un rayon de convergenge plus grand que le minimum des deux rayons.**
> **Donc le rayon est ≥ 1.**
> **Les b_n peuvent s'ecrire grâce à la formule du produit :** $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$**.**

5) Verifier que la fonction g satisfait les equations (3) et (4). En déduire que $f = g$ sur $]-1, 1[$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

> **la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (4) avec condition initiale $(f - g)(0) = 0$. La fonction nulle est egalement solution de (4) avec la même condition initiale. Par Cauchy, on a l'unicité de la solution. Donc $(f - g)$ est la fonction nulle, donc $f = g$ sur $]-1, 1[$.**
> **Par unicité du developpement en série entière, on a $a_n = b_n$.**

Conclusion

6) En utilisant ce qui précede, donner une expression de d_n sous la forme d'une somme.

> $d_n = n!a_n = n!(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!})$

7) *(Question bonus)* Vers quoi converge la probabilité qu'une permutation de $\{1, ..., n\}$ quelconque n'ai pas de point fixe lorsque $n \to +\infty$?

> **Il y a $n!$ permutation de $\{1, ..., n\}$ et parmis elle d_n sont sans points fixes.**
> **La probabilité de choisir une permutation sans points fixes est $d_n/n! = a_n$.**
> **Et $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1/e$.**

- Fin du sujet -