D.S.1 - Corrigé

LM-250, Gr. 5

22 octobre 2013

Problème 1 [Intégrale généralisée]

On s'intéresse aux intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ x)dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos\ x)dx$$

Q1) Quelle est la nature de I? (On précisera les points de singularité)

> La fonction $x \mapsto ln(sin\ x)$ est continue sur $]0, \pi/2]$.
> Il y a un point de singularité en 0.
> En 0, on sait que $sin\ x = x + o(x)$ (DL à l'ordre 1).
> Donc $ln(sin\ x) = ln(x + o(x)) = lnx + ln(1 + o(1))$.
> D'ou $ln(sin\ x) \sim ln(x)$ en 0.
> On sait que 1) $\int_0 ln(x)dx$ CV (on l'a deja fait plusieurs fois en TD).
> 2) ln(x) de signe fixe (< 0) au voisinage de 0.
> Donc on peut appliquer le théorème des équivalent pour déduire que $\int_0 ln(sin\ x)dx$ CV.
> Pour $x \mapsto ln(cos\ x)$, c'est la même chose.

Q2) Grâce à un changement de variable, montrer que $I = J$.

> On fait le changement $t = \pi/2 - x$ dans I:
> $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ln(sin(\pi/2 - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos\ t)dt = J$.

Q3) Calculer $I + J$. (on pourra utiliser la formule de trigo $sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$ et un changement de variable)

> On calcule $I + J$:
> $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ln(sin\ x) + ln(cos\ x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ x.cos\ x)dx$
> $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ 2x/2)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ 2x)dx - \pi/2.ln(2)$
> On fait le changement $t = 2x$ dans l'intégrale restante:
> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ 2x)dx = \int_0^{\pi} ln(sin\ t)(dt/2) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ t)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ln(sin\ t)dt$
> La première intégrale est I, pour la deuxième, on pose $u = \pi - t$:
> $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ln(sin\ t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ln(sin\ (\pi - u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ u)du = I$

Finalement, on obtient:
$I + J = -\pi/2.ln(2) + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I.$

Q4) En déduire la valeur de I.

Comme $I = J$, et que $I + J = -\pi/2.ln(2) + I$,
on a $2I = I + J = -\pi/2.ln(2) + I$ d'ou $I = -\pi/2.ln(2)$.

Problème 2 [Bioche]

$$\textit{(1)} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + sin\ x} \qquad (a > 1)$$

On veut calculer l'intégrale ci-dessus, où $a > 1$ est un paramètre fixé. Pour cela, on va étudier la fonction $\phi : x \mapsto arctan(x) + arctan(\frac{1}{x})$.

Q1) Justifier que ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Calculer ϕ'. En déduire l'existence (et calculer sa valeur) d'une constante k, telle que:

$$\forall x > 0, \quad arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = k$$

ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme composé de fonction $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).
$\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + (-\frac{1}{x^2})\frac{1}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$
Comme la dérivée est nulle, on en déduit que ϕ est constante.
Pour trouver cette constante, on applique en une valeur particulière, par example en 1: $\phi(1) = 2.arctan(1) = \pi/2$.

Q2) En utilisant un changement de variable approprié (règles de **Bioche**) puis la question précédente, calculer l'intégrale *(1)*.

On applique les règles de Bioche, ici les invariants $x \to -x$, $x \to \pi - x$, $x \to \pi + x$ ne marche pas. Il faut donc faire le changement $t = tan(x/2)$.
Grâce au formulaire, on obtient:
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+sin\ x} = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)(a+\frac{2t}{1+t^2})} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{a+2t+at^2}$
Pour calculer cette intégrale, on va mettre le polynôme du dénominateur sous forme canonique:
$\frac{1}{a+2t+at^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{t^2+\frac{2}{a}t+1} = \frac{1}{a}\frac{1}{(t+\frac{1}{a})^2+1-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}\frac{1}{(t+\frac{1}{a})^2+\frac{a^2-1}{a^2}} = \frac{1}{a}\frac{a^2}{a^2-1}\frac{1}{(\frac{at+1}{\sqrt{a^2-1}})^2+1}$
Si on revient à l'intégrale, on a: $\int_{-1}^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)(a+\frac{2t}{1+t^2})} = \frac{2a}{a^2-1}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(\frac{at+1}{\sqrt{a^2-1}})^2+1}$.
On reconnait la primitive de $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}arctan(\frac{at+1}{\sqrt{a^2-1}})$ sous l'intégrale, d'ou:
$\int_{-1}^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)(a+\frac{2t}{1+t^2})} = \frac{2a}{a^2-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\left[arctan(\frac{at+1}{\sqrt{a^2-1}})\right]_{-1}^{1}$
$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(arctan(\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}) - arctan(\frac{1-a}{\sqrt{a^2-1}})\right)$
$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(arctan(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}) + arctan(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}})\right)$

(On utilise $a^2-1=(a-1)(a+1)$ pour simplifier les $arctan$).
D'après la question précédente, on a $arctan(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}})+arctan(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}})=\frac{\pi}{2}$.
Finalement, on a:
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+sin\ x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
On remarque que la racine est bien définie car on supposé dans l'énoncé que $a>1$ (autrement l'intégrale ne serai pas définie car le dénominateur pourra s'annuler).

Problème 3 [Série]

On s'interesse à la serie suivante:

$$\sum_{TG}\frac{(-1)^n}{n}$$

Q1) Montrer que la serie est convergente.

On applique le critère des série alternée. Il faut dire:
1) que $\frac{1}{n}$ tend vers 0.
2) que $\frac{1}{n}$ est décroissante.

Q2) Justifier rapidement que la fonction $f: x\mapsto ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, puis calculer les dérivée n-ième $f^{(n)}$. (on pourra procéder par récurrence)

f est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$.
On sait calculer les premières dérivées: $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$, $f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$,...
On devine (et on prouve par récurrence) que $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Q3) En utilisant un développent de Taylor avec reste intégral de la fonction f (voir formulaire), montrer que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-ln(2)+(-1)^n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$$

On applique la formule de Taylor:
$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$
pour la fonction f, pour $a=0$ et $x=1$. On obtient:
$ln(2)=f(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$
Grace à **Q2)**, on sait que pour $k>0$, $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$
et que $f(0)=0$. D'ou:
$ln(2)=0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}dt$
En simplifiant les factorielles, on obtient le résultat demandé.

Q4) En majorant correctement $\frac{1}{(1+t)^{n+1}}$, montrer que $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

> On est entre 0 et 1 donc $t \geq 0$ donc $1+t \geq 1$ donc $(1+t)^{n+1} \geq 1$ donc $\frac{1}{(1+t)^{n+1}} \leq 1$. Ce qu'on intègre est positif (car $1-t \geq 0$), d'ou:
> $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \leq \int_0^1 (1-t)^n dt$ (on utilise la majoration).
> L'intégrale de droite se calcule directement:
> $\int_0^1 (1-t)^n dt = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$.
> Par encadrement, le "reste intégral" $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$ tend vers 0.

Q5) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

> On fait tendre n vers l'infini dans l'égalité établie à la question **Q3)**.
> Le membre de droite tends vers 0 d'après la question **Q4)**.
> On obtient: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -ln(2)$.