D.S.1

LM-250, Gr. 5

22 octobre 2013

Problème 1 [Intégrale généralisée]

On s'intéresse aux intégrales suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\ x)dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos\ x)dx$$

Les fonctions $x \mapsto ln(sin\ x)$ et $x \mapsto ln(cos\ x)$ sont intéressantes car on ne peut pas exprimer leurs primitives de manière simple alors qu'il est possible de calculer la valeur de leur intégrales.

Q1) Quelle est la nature de I? (On précisera les points de singularité)
Q2) Grâce à un changement de variable, montrer que $I = J$.
Q3) Calculer $I + J$. (on pourra utiliser la formule de trigo $sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$ et un changement de variable)
Q4) En déduire la valeur de I.

Problème 2 [Bioche]

$$\textit{(1)} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + sin\ x} \qquad (a > 1)$$

On veut calculer l'intégrale ci-dessus, où $a > 1$ est un paramètre fixé. Pour cela, on va étudier la fonction $\phi : x \mapsto arctan(x) + arctan(\frac{1}{x})$.

Q1) Justifier que ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Calculer ϕ'. En déduire l'existence (et calculer sa valeur) d'une constante k, telle que:

$$\forall x > 0, \quad arctan(x) + arctan(\frac{1}{x}) = k$$

Q2) En utilisant un changement de variable approprié (regles de **Bioche**) puis la question précédente, calculer l'intégrale *(1)*.

Problème 3 [Série]

On s'interesse à la serie suivante:

$$\sum_{TG} \frac{(-1)^n}{n}$$

Q1) Montrer que la serie est convergente.

Q2) Justifier rapidement que la fonction $f : x \mapsto ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, puis calculer les dérivée n-ième $f^{(n)}$. (on pourra procéder par réccurence)

Q3) En utilisant un développent de Taylor avec reste intégral de la fonction f (voir formulaire), montrer que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Q4) En majorant correctement $\frac{1}{(1+t)^{n+1}}$, montrer que $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Q5) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Formulaire

Changement de variable (Bioche):

$$\textbf{Si on pose } t = tan(\frac{x}{2}) \textbf{ alors } \left\{ \begin{array}{ccc} dx = \frac{2dt}{1+t^2} & , & tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \\ sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} & , & cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right.$$

Primitives:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) \qquad ; \qquad \int \frac{dx}{1+(\alpha x+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha} arctan(\alpha x + \beta)$$

Développement de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$