TD 6 : MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

COURS D'APPRENTISSAGE, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 30 OCTOBRE 2016

Jean-Baptiste Alayrac
jean-baptiste.alayrac@inria.fr

Resume. Dans ce court TD on calculera les estimateurs du maximum de vraisemblance dans le cas de données i.i.d (indépendantes et identiquements distribuées) suivant une loi Gaussienne puis dans le cadre du modèle de la régression linéaire.

1. Exercice : Maximum de vraisemblances dans des modeles simples

Pour cet exercice on rappelle l'expression de la densité d'une variable aléatoire Gaussienne univariée (à valeur dans $\mathbb{R}$) de moyenne μ et de variance σ^2 :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\big\}.$$

1) Considérer un n-échantillon $(x_1, \ldots x_n)$, réalisation de variables Gaussiennes i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées) de moyenne μ et de variance σ^2. En utilisant le principe du maximum de vraisemblance, calculer les estimateurs $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}$ associés. Pour le calcul du maximum de vraisemblance, on rappelle qu'il est général plus facile de faire les calculs en utilisant une transformation monotone de la vraisemblance comme le log.

On considère un modèle de régression linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit un n-échantillon $(x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ que l'on suppose généré suivant un modèle $Y = \beta^T X + \epsilon$ où ϵ est un bruit Gaussien indépendant de X centré ($\mathbb{E}[\epsilon] = 0$) de variance σ^2.

2) Vérifier que, conditionnellement à X, Y suit une loi Gaussienne de moyenne $\mu(X)$ que l'on précisera et de variance σ^2.

3) Quels sont les estimateurs du maximum de vraisemblance de la variance σ^2 et de β dans ce cas ?