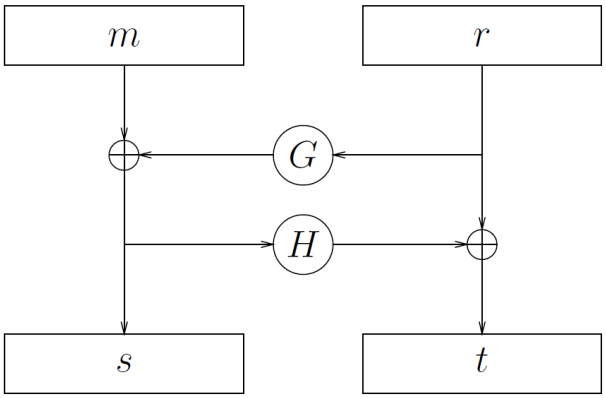
5. OAEP : Optimal Asymmetric Encryption Padding

5.1 Description

En 1994, Bellare et Rogaway ont proposé le padding suivant à appliquer avant l'utilisation d'une permutation à sens-unique à trappe f_{pk} (telle RSA) de $\{0,1\}^k$, où

$$G : \{0,1\}^{k_0} \to \{0,1\}^n \text{ et } H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{k_0},$$

avec $k = k_0 + n$.



C'est-à-dire que pour chiffrer un message $m \in \{0,1\}^n$, on applique la construction ci-dessus avec un aléa $r \xleftarrow{R} \{0,1\}^{k_0}$, pour obtenir le couple $(s,t) = \mathsf{OAEP}(m,r)$. On applique alors la permutation f_{pk} sur l'objet $s\|t$ pour obtenir le chiffré $c = \mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m;r)$.

> **Q-1.** Décrire l'algorithme de déchiffrement en fonction de g_{sk}, la permutation réciproque de f_{pk}, accessible à qui connaît la trappe sk.

5.2 Sécurité sémantique

Soit $y = f_{\mathsf{pk}}(s\|t)$, le chiffré du message $m_b = m \in \{m_0, m_1\}$, avec l'aléa r (donc $(s,t) = \mathsf{OAEP}(m_b, r)$ pour $b \in \{0,1\}$).

> **Q-2.** Montrer que, dans le modèle de l'oracle aléatoire où les fonctions G et H sont modélisées par des fonctions parfaitement aléatoires, sans avoir posé la question $G(r)$, un attaquant a un avantage nul pour deviner b (soit si $m = m_0$ ou si $m = m_1$).

Rappel : L'avantage d'un attaquant contre la sécurité sémantique d'un schéma de chiffrement $\pi = (\mathcal{G}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ est

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{ind}}_{\pi}(\mathcal{A}) = 2 \times \Pr_{\substack{b \leftarrow \{0,1\} \\ r \leftarrow \{0,1\}^{k_0}}} \left[\begin{array}{l} (\mathsf{pk}, \mathsf{sk}) \leftarrow \mathcal{G}(1^k); (m_0, m_1, s) \leftarrow A_1(\mathsf{pk}) \\ c = \mathcal{E}_{\mathsf{pk}}(m_b; r) : A_2(m_0, m_1, s, c) = b \end{array} \right] - 1.$$

> **Q-3.** Préciser l'avantage d'un attaquant qui n'aurait pas posé la question $H(s)$.

Q-4. En déduire que cette construction conduit à un schéma IND-CPA, dans le modèle de l'oracle aléatoire, sous réserve que f_{pk} soit une permutation à sens-unique à trappe sur $\{0,1\}^k$.

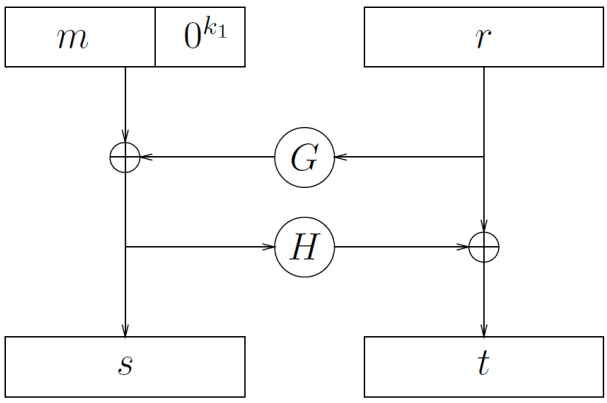
Note : Pour cela, on précisera l'avantage maximal, en temps t, d'un attaquant qui peut poser au plus q_g et q_h questions aux oracles G et H respectivement. On pourra utiliser $\mathsf{Succ}^{\mathsf{ow}}_f(t)$, le maximum pour tout algorithme $\mathcal{A}$ en temps t de

$$\mathsf{Succ}^{\mathsf{ow}}_f(t) = \max_{\mathcal{A}} \left\{ \Pr_{\mathsf{pk},x}[\mathcal{A}(f_{\mathsf{pk}}(x)) = x] \right\},$$

où pk et x sont choisis selon les distributions convenables : $(\mathsf{pk},\mathsf{sk}) \leftarrow \mathcal{G}(1^k)$ et $x \leftarrow \{0,1\}^k$.

5.3 Non-malléabilité

L'objectif initial de OAEP était de conduire à un schéma de chiffrement sûr contre les attaques à chiffrés choisis à partir de toute permutation à sens-unique à trappe. Pour cela, une redondance était nécessaire : $(s,t) = \mathsf{OAEP}'(m,r) = \mathsf{OAEP}(m\|0^{k_1},r)$, avec $m \in \{0,1\}^{n-k_1}$ et $r \in \{0,1\}^{k_0}$.



Un chiffré est considéré valide si l'inversion de f_{pk} fait bien apparaître cette redondance 0^{k_1}. Et alors, ce qui précède cette série de 0 est retourné en tant que message clair. Dans le cas contraire, le chiffré est refusé.

Considérons une permutation à sens-unique à trappe F_{pk} de $\{0,1\}^{k_0}$, pour laquelle il existe un algorithme $\mathcal{A}$ qui calcule $F_{\mathsf{pk}}(x \oplus a)$ à partir de pk, a et $y = F_{\mathsf{pk}}(x)$:

$$\mathcal{A}(\mathsf{pk}, a, y = F_{\mathsf{pk}}(x)) = F_{\mathsf{pk}}(x \oplus a).$$

Définissons la fonction de $f_{\mathsf{pk}}(s\|t) = s\|F_{\mathsf{pk}}(t)$, pour $s \in \{0,1\}^n$ et $t \in \{0,1\}^{k_0}$.

Q-5. Montrer que f_{pk} est une permutation de $\{0,1\}^k$ à sens-unique à trappe. Pour cela, on évaluera $\mathsf{Succ}^{\mathsf{ow}}_f(t)$ en fonction de $\mathsf{Succ}^{\mathsf{ow}}_F(t)$.

Q-6. Exprimer $(s',t') = \mathsf{OAEP}'(m \oplus \delta, r)$, pour $\delta \in \{0,1\}^{n-k_1}$, en fonction de

$$(s,t) = \mathsf{OAEP}'(m,r), \quad \Delta = \delta\|0^{k_1}, \quad \Gamma = H(s) \oplus H(s').$$

Q-7. En déduite que la construction OAEP' sur la fonction f_{pk} est malléable.

Q-8. Que dire de son niveau de sécurité IND-CCA2 souhaité ?