Authentification et Integrité : Signature numérique et Hachage

Anca Nitulescu
anca.nitulescu@ens.fr

Ecole Normale Supérieure, Paris

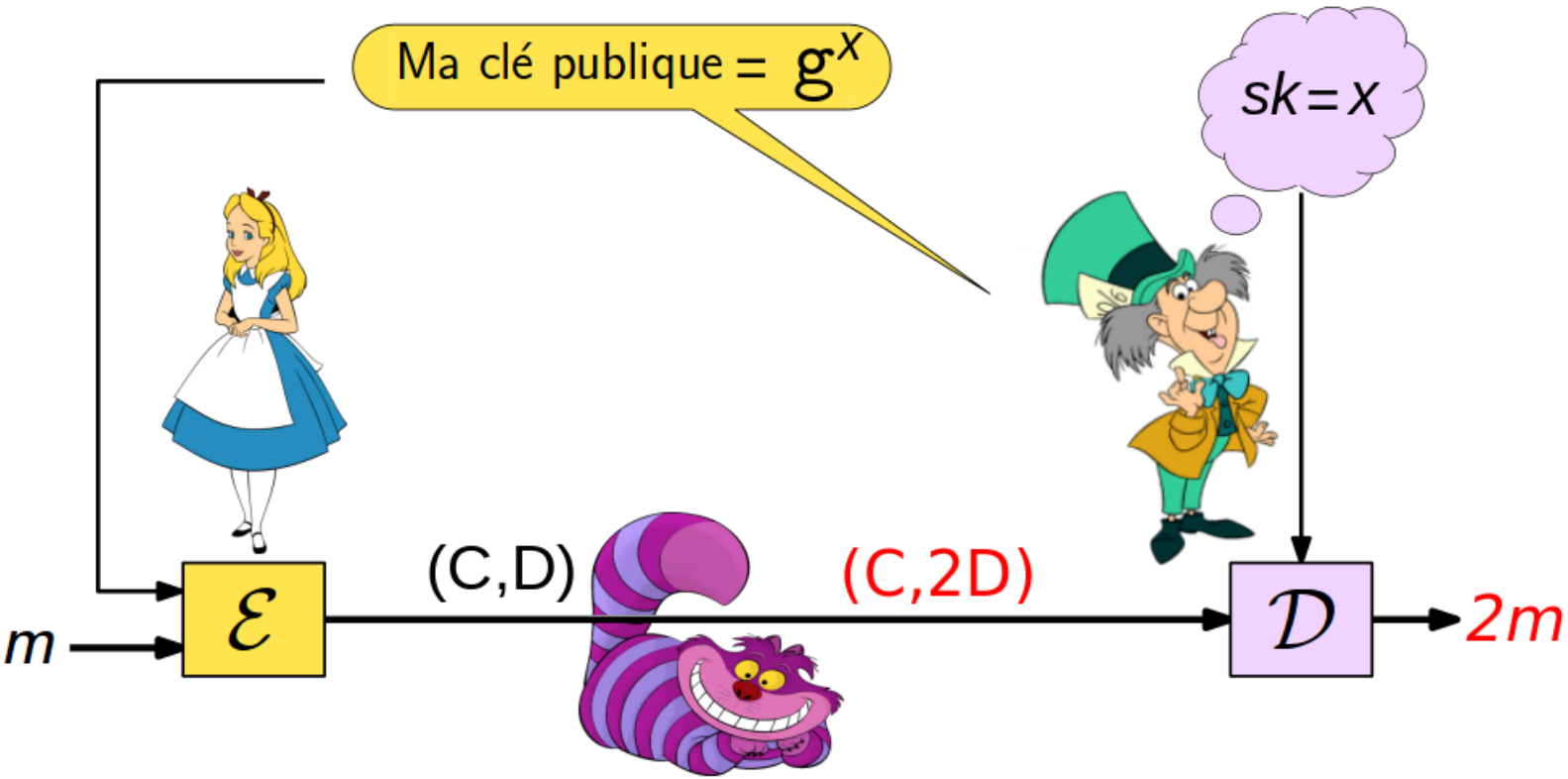
Cours 6

Motivations

Usurpation d'identité

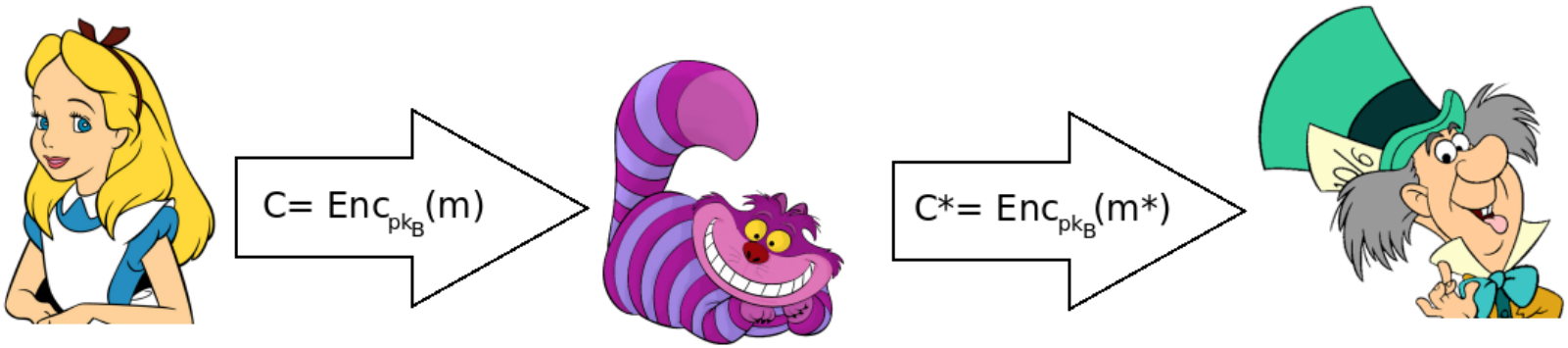
- Bob crédite le compte d'Alice sur Internet
- L'adversaire intercepte le message et remplace les données bancaires de Alice avec les siennes
- La banque crédite le compte de l'adversaire !

Attack IND - CCA



Solution : Authentification

Authentification - Motivations



Usurpation d'identité

La confidentialité de la communication n'est pas toujours suffisante !

Motivations

Usurpation d'identité

Pourquoi faut-il authentifier les clés publiques ?

- Alice souhaite envoyer un message sécret à Bob.
- Alice utilise la clé publique de Bob pk_B.
- Mais comment Alice a-t-elle obtenu pk_B ?
- Oscar lui fait croire que la clé publique de Bob. est pk_O (clé publique de Oscar)
- Alice envoie à Bob le sécret chiffré avec la clé de Oscar
- Oscar décrypte le message et apprend le secret !

Signature numérique : idée générale

Objectifs

Reproduire les caractéristiques d'une signature manuscrite :

- Lier un document à son autheur
- Rendre la signature difficilement imitable
- Responsabilité de l'auteur (juridique)

Signature numérique

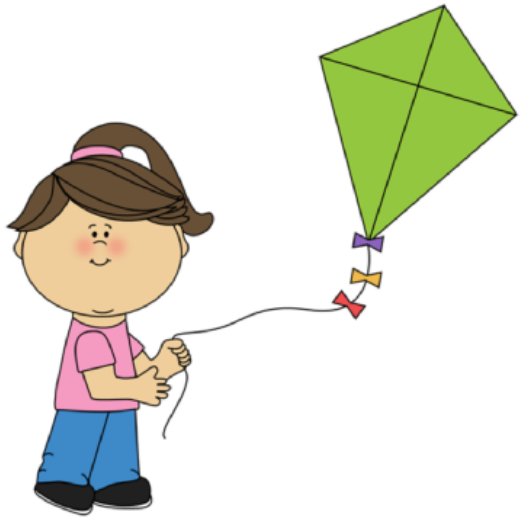
Propriétés

La signature numérique dépend du signataire et du document :

- La signature appartient à un seul document :
  - impossible à découper une signature sur un message et la recoller sur un autre.
  - le document signé ne peut être modiffié.
- La signature ne peut être falsifiée.
- La signature ne peut pas être reniée.

Signature numérique

Signataire



Vérifieur

Signature σ ⟶ OK/NO

m ⟶ m

Les différents acteurs

Le Signataire

Doit pouvoir facilement émettre des signatures en son nom

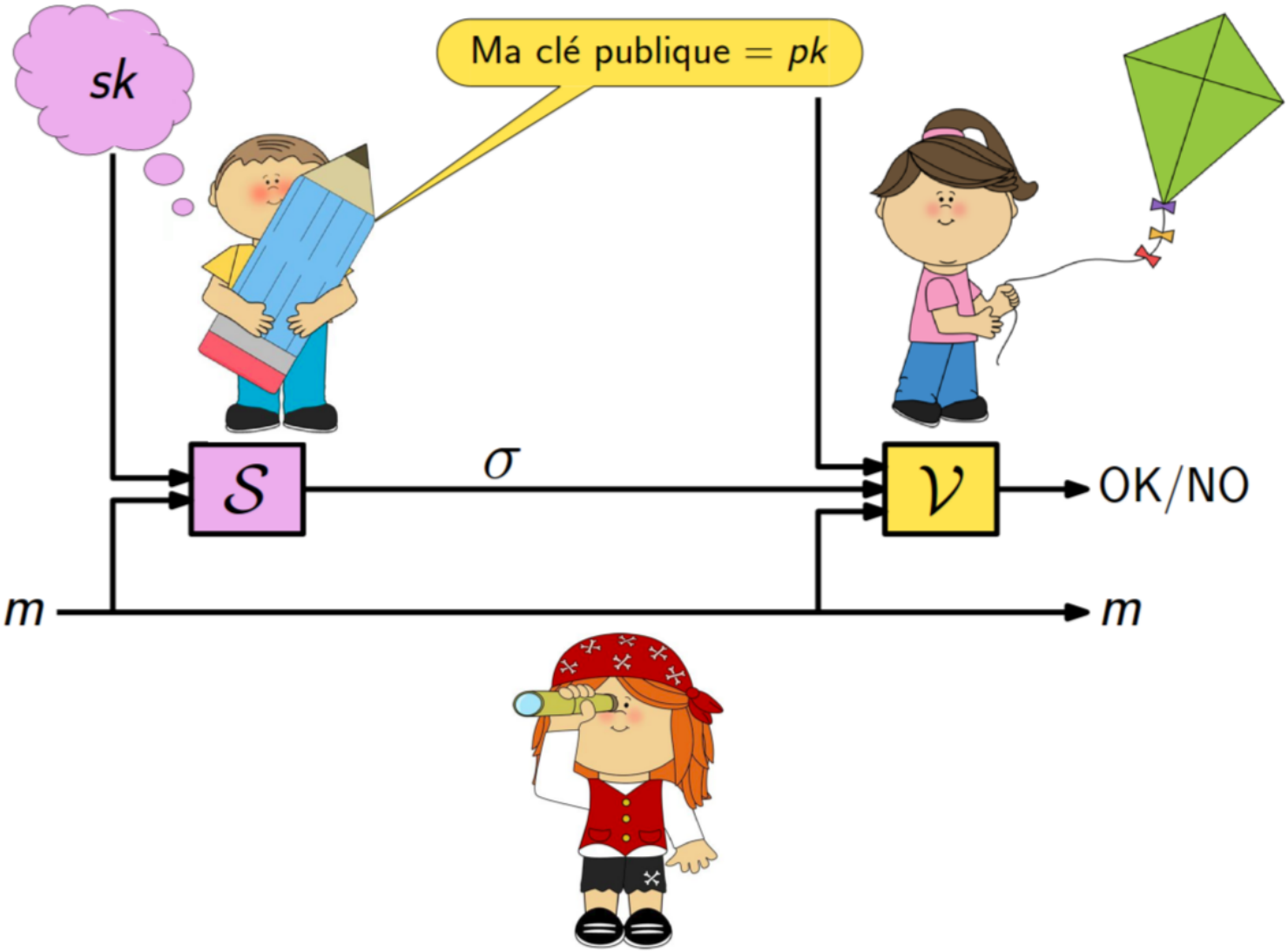
Le vérifieur

Doit pouvoir vérifier la signature sans avoir d'information confidentielle
Potentiellement tout le monde doit pouvoir vérifier.

L'ennemi

Il cherche à générer une fausse signature

Fonctionnement



Signatures numériques

Algorithme de génération des clés

$\mathcal{KG}(\ell) = (\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$
à partir d'un paramètre de sécurité, il produit un couple de clés : clé publique, clé sécrete

Algorithme de signature

$\mathcal{S}(\mathsf{sk}, m) = \sigma$
utilise la clé sécrete sk pour signer le message

Algorithme de vérification

$\mathcal{V}(\mathsf{pk}, m, \sigma) = yes/no$
utilise la clé publique pour vérifier le message et la signature reçus

Signature RSA

Génération des clés

$\mathcal{KG}(\ell) = (\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$

- Soit $n = p \cdot q$ (p et q premiers)
- L'ordre du groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_n^\star = \varphi(n) = (p-1)(q-1)$
- Soit e un entier premier avec $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
- Soit d un entier qui satisfait $d \cdot e = 1 \pmod{\varphi(n)}$

$$d \cdot e + u\varphi(n) = 1 \qquad \text{(Bézout)}$$

clé publique

- $n = pq$: module public
- e : clé de vérification

clé secrète

- $d = e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$
- les premiers p et q

Chiffrement RSA

RSA - Génération des clés

- $\text{pk} = e$
- $\text{sk} = d$

RSA - Chiffrement

$\mathcal{E}(\text{pk} = (e, n), m) = C$

$C = m^e \pmod{\text{n}}$

RSA - Déchiffrement

$\mathcal{D}(\text{sk} = \text{d}, C) = m$

$m = C^d \pmod{\text{n}}$

Signature RSA

σRSA - Génération des clés

- $\text{pk} = e$
- $\text{sk} = d$

σRSA - Signer

$\mathcal{S}(\text{sk} = d, m) = \sigma$

$\sigma = m^d \pmod{\text{n}}$

σRSA - Vérifier

$\mathcal{V}(\text{pk}, m, \sigma) = yes/no$

$m \stackrel{?}{=} \sigma^e \pmod{\text{n}}$

Signature RSA

Avantages

- La signature assure l'authentification
- La vérification est publique

Inconvénients

- Signature détérministe (on peut la reutiliser pour envoyer de nouveau le même message signé).
- À partir d'une signature σ on peut fabriquer un message m pour lequelle σ est validée : $m = \sigma^e$.
- Malléalibité : Si on a deux messages signés (m_1, σ_1) et (m_2, σ_2) on crée un nouveau message signé $(m_1 m_2, \sigma_1 \sigma_2)$.

Signature ElGamal

ElGamal - Génération des clés

$\mathcal{KG}(\ell) = (\mathsf{pk}, \mathsf{sk})$

- Soit un premier p et le groupe cyclique $\mathbb{Z}_p^\star$
- Soit $g \in \mathbb{Z}_p^\star$ un élément d'ordre $q|(p-1)$.
- Soit une clé secrète $\mathsf{sk} = x$.
- Soit $\mathsf{pk} = g^x \pmod p$.

clé publique

- p et g : paramètres publiques
- $\mathsf{pk} = g^x$: clé de vérification

clé secrète

- $\mathsf{sk} = x$
  exposant sécret

Chiffrement ElGamal

ElGamal - Clés

- $\mathsf{pk} = g^x$
- $\mathsf{sk} = x$

ElGamal - Chiffrement

$\mathcal{E}(\mathsf{pk} = g^x, m) = (C, D)$
$(C, D) = (g^r, (g^x)^r m) \pmod{\mathrm{p}}$

ElGamal- Déchiffrement

$\mathcal{D}(\mathsf{sk} = x, (C, D)) = m$
$m = D/C^x \pmod{\mathrm{p}}$

Signature ElGamal

σElGamal - Clés

- $\mathsf{pk} = g^x$
- $\mathsf{sk} = x$

σElGamal - Signer

$\mathcal{S}(\mathsf{sk} = x, m) = \sigma \pmod{\mathrm{q}}$
$\sigma = (C, D) = (g^r, (m - xg^r)/r)$

σElGamal - Vérifier

$\mathcal{V}(\mathsf{pk} = g^x, m, \sigma) = yes/no$
$g^m \stackrel{?}{=} C^D (g^x)^C \pmod{\mathrm{p}}$

Signature ElGamal

Avantages

- La signature est très efficace (une seule exponentiation modulaire)
- Signature randomisée (chaque fois qu'on signe le même message on obtient une nouvelle signature)

Inconvénients

- La vérification est couteuse (3 exponentiations)
- La signature est longue : deux fois la taille de p

Généralités - Signatures

Problématiques

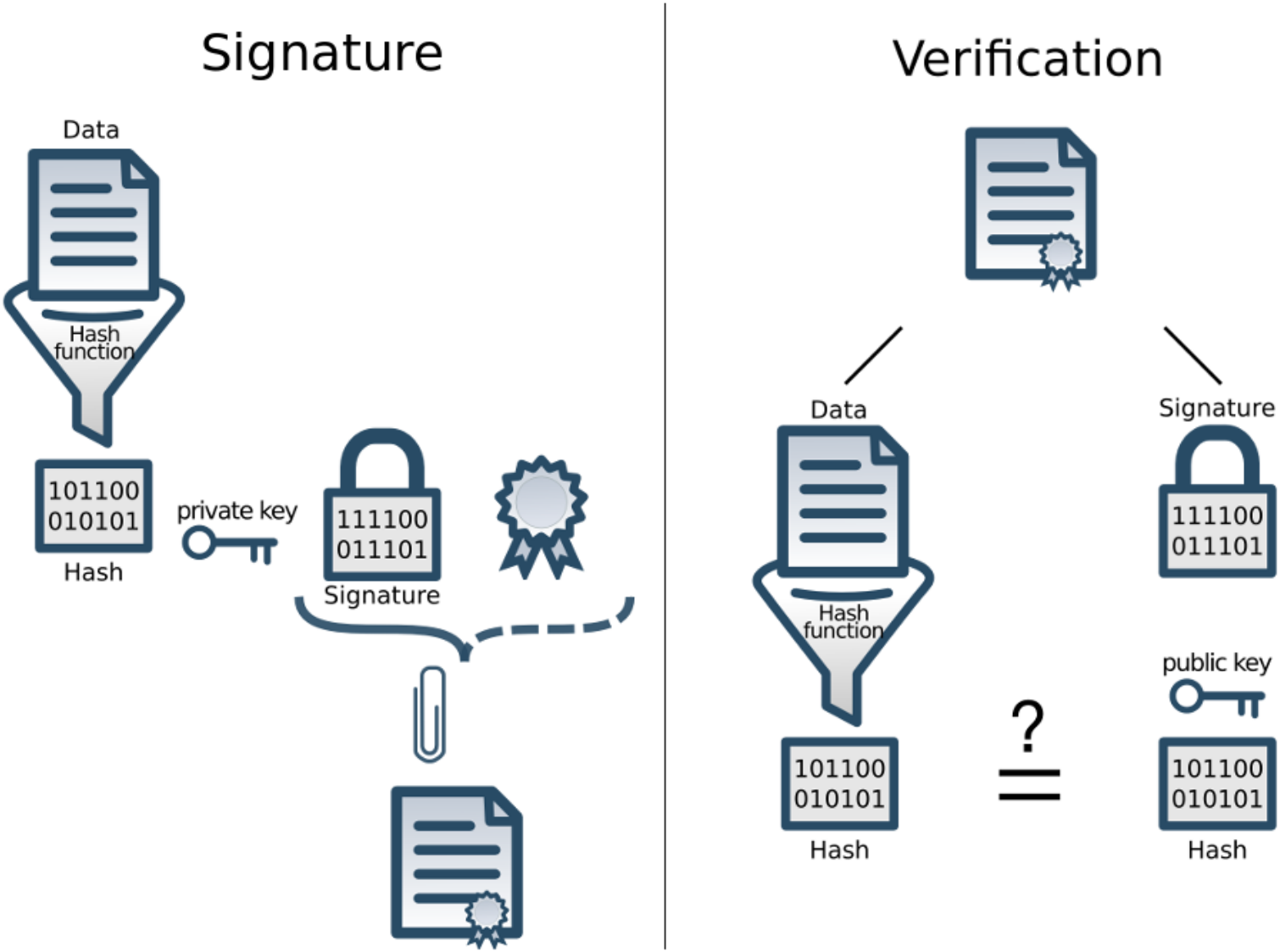
- La malléalibité : $\sigma(m_1), \sigma(m_2) \Rightarrow \sigma(m_1 m_2)$
- La construction d'un message valide à partir d'une signature.
- Signer des messages arbitrairement longs avec un schéma
  - Signature d'un document de 15 Mo avec RSA 1024 bits ? ?

Solution : Hash & Sign

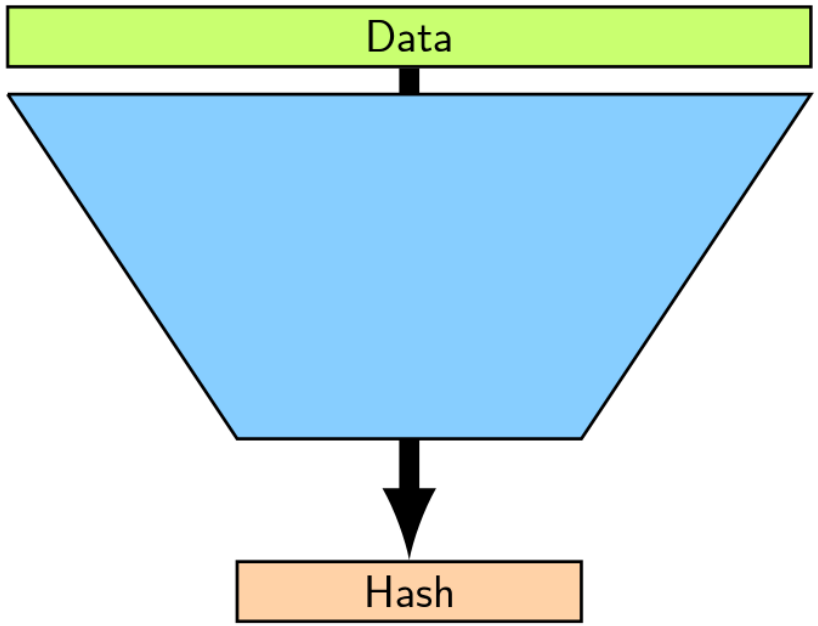
Utilisation de fonctions de hachage

- Taille de signature indépendante de la taille du message
- Sécurité conservée : les falsifications restent dificiles

Signature et hachage



Idée générale



Fonction de hachage

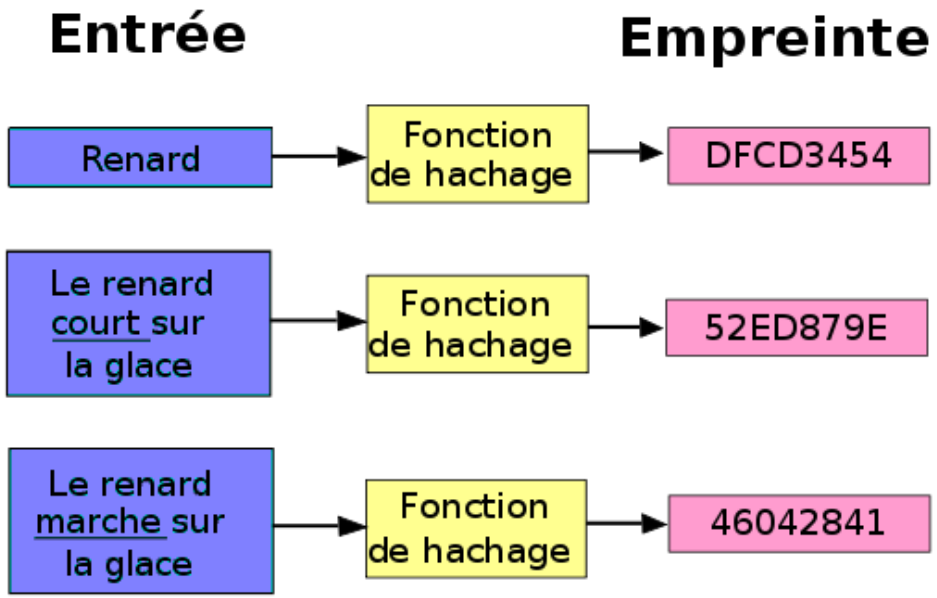
Une fonction qui, à partir d'une donnée arbitraire, calcule une empreinte servant à condenser et identifier rapidement la donnée initiale

But

L'intégrité des données

- Vérifier que les infos transmises n'ont pas subi d'altérations.

- Produire une empreinte condensée qui soit facilement vérifiable.



Fonctions de hachage

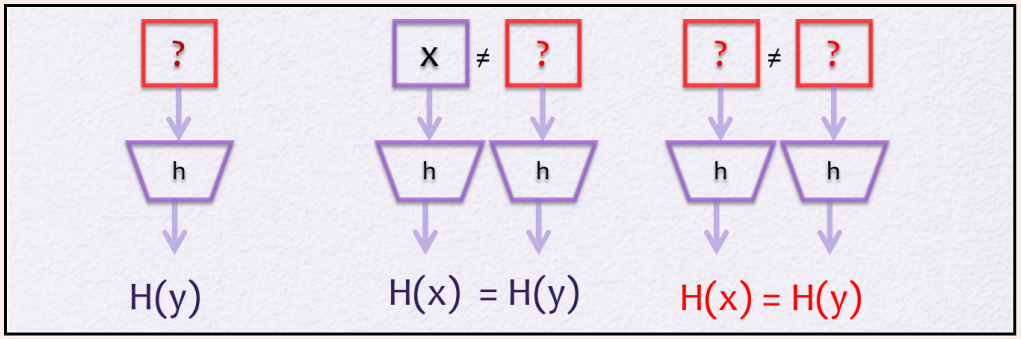
Propriétés

Une bonne fonction de hachage doit être :

- publique (pas de notion de secret)
- facile et rapide à calculer
- à sortie de taille fixe (quelque soit l'entrée)
- bien répartie en sortie ("mélange" bien)

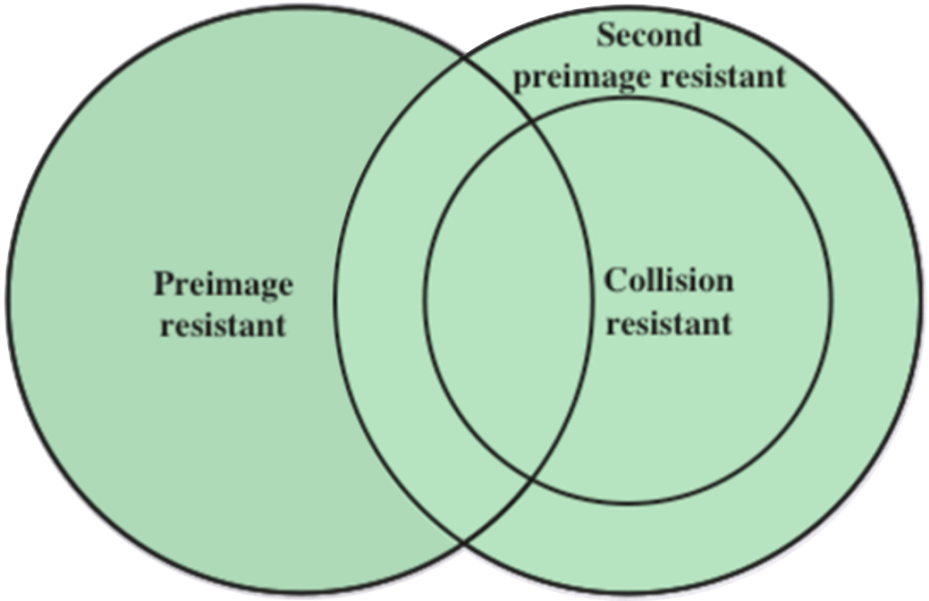
Fonctions de hachage

• Propriétés



- **Résistance à la préimage :**
  étant donné h, il est difficile de trouver y tel que $h = H(y)$
- **Résistance à la seconde préimage :**
  étant donné x, il est difficile de trouver $y \neq x$ tel que $H(x) = H(y)$
- **Résistance à la collision :**
  il est difficile de trouver x et y tels que $H(x) = H(y)$

Fonctions de hachage



Types des fonctions

- **Fonction de Hachage à Sens Unique**
  résistance à la préimage et à la seconde préimage
- **Fonction de Hachage résistante aux collisions**
  résistance à la seconde préimage et à la collision

Paradoxe des anniversaires

Problème

Calculer le nombre de personnes que l'on doit réunir pour avoir une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour.

Paradoxe des anniversaires

Résultat

Une classe de 23 des élèves est suffisante, ce qui choque l'intuition, car il y a 365 possibilités pour les dates d'anniversaire !

Solution

Calculer $\overline{P}$

$P =$ **Prob** (il y a une paire de personnes nées le même jour)
$\overline{P} =$ **Prob** (aucune paire de personnes nées le même jour)

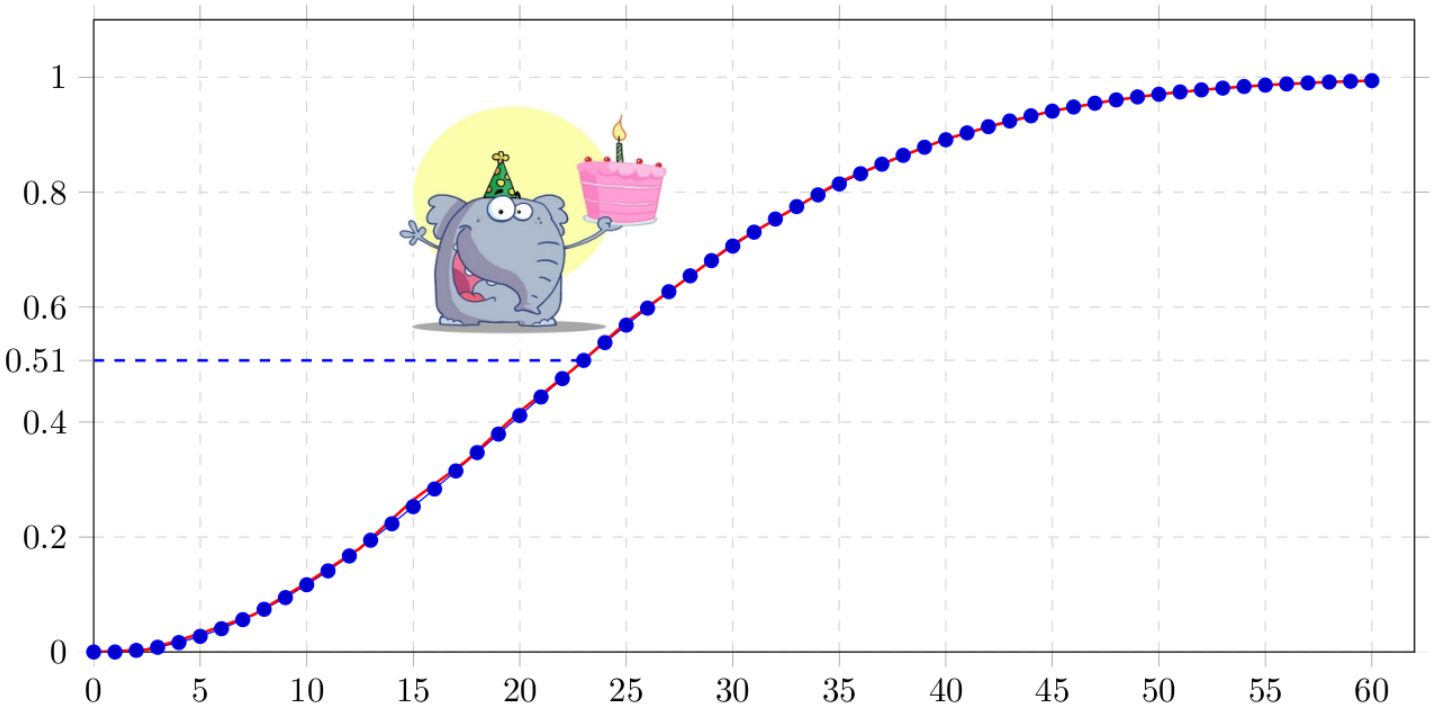
n personnes, 365 jours possibles $\Rightarrow$ 365^n possibilités.
Si on veut des jours différents, nous obtenons un arrangement de n parmi 365 :

- personne 1 : 365 choix,
- personne 2 : 364 choix,
- ...

$$A_{365}^n = (365-0)(365-1)...(365-n+1) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{365^n}\frac{365!}{(365-n)!} \quad \Rightarrow \quad P = 1 - \overline{P}$$

Paradoxe des anniversaires



Résultat

À partir de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99%.

Attaques des anniversaires

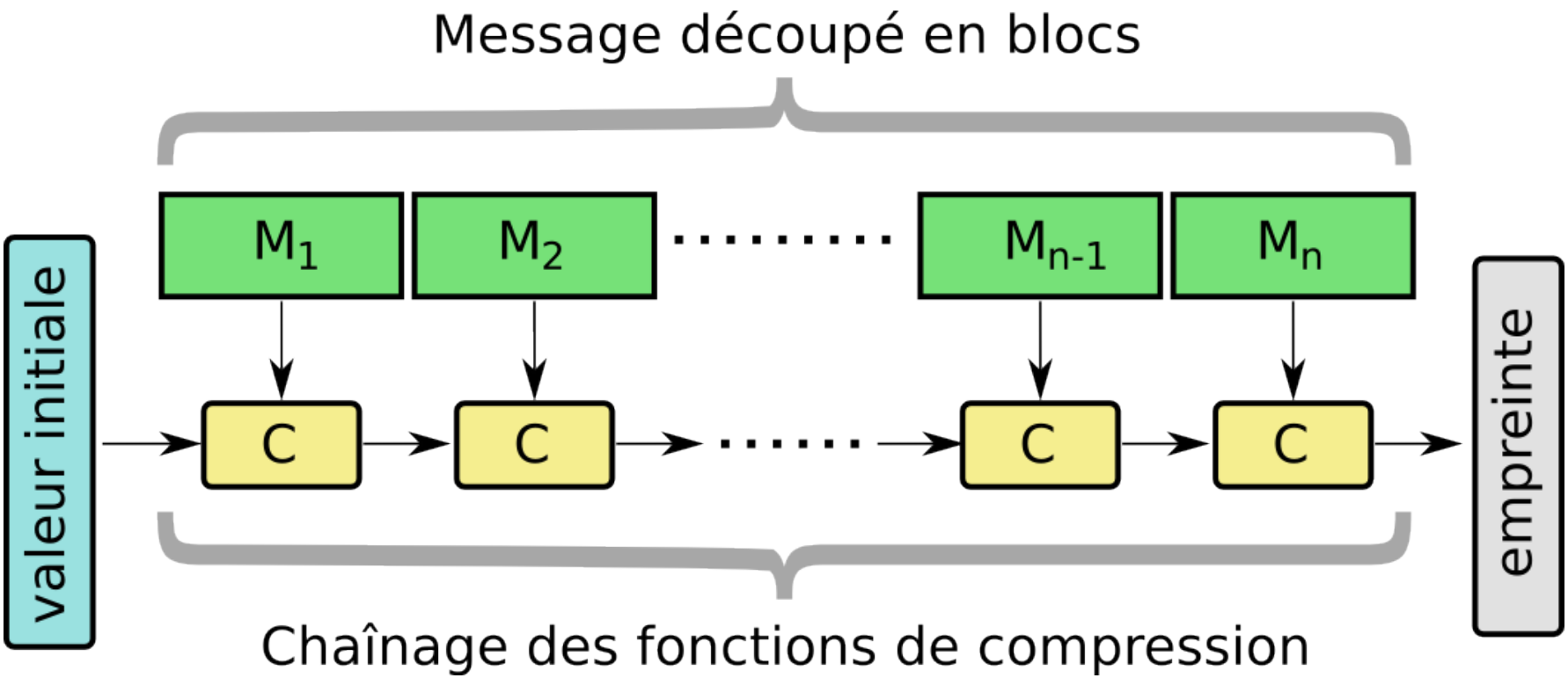
Trouver des collisions

Si la fonction de hachage a N valeurs possibles, $\sqrt{N}$ calculs suffisent en moyenne pour obtenir une collision :

$$H : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^n$$

La recherche brutale de collisions a plus d'une chance sur 2 d'aboutir aprés seulement $\mathcal{O}(2^{n/2})$ essais !

Hachage - Principe de fonctionnement



Fonctions de hachage classiques

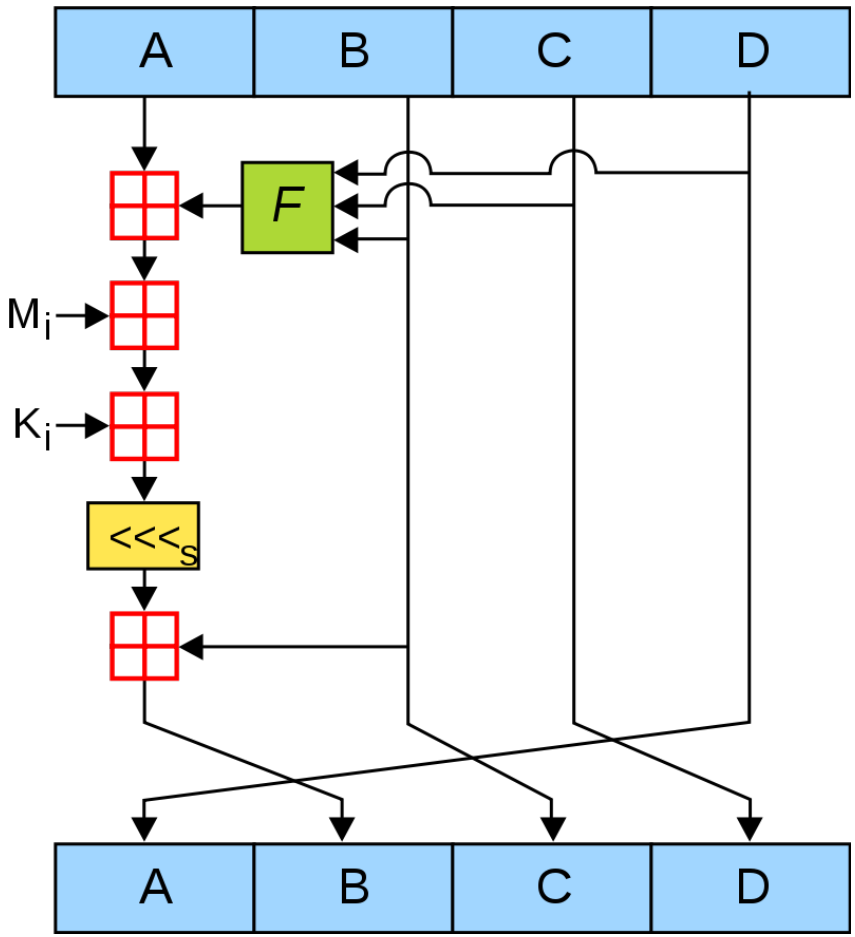
Fonction MD

- Proposé par Rivest en 1991
- MD2, MD4, MD5 : condensés de 128 bits
- MD2 : calcul (théorique) de pré-images en $\mathcal{O}(2^{104})$
- MD4 : peu utilisée, collisions "faciles" (2004)

Fonction MD5

- MD5 : blocs de 512 bits, sortie de 128 bits
- 64 rondes sur 4 sous-blocs de 32 bits A, B, C, D
- Sécurité de MD5 face aux collisions
  - Force brute : $\mathcal{O}(2^{64})$ (attaque anniversaires)
  - Collisions en $\mathcal{O}(2^{42})$ exhibées en 2004 [Wang04]
  - Collisions en $\mathcal{O}(2^{30})$ exhibées en 2005 [Sasaki05]

La fonction de compression de MD5



Fonctions de hachage classiques

Fonction SHA (Secure Hash Algorithm)

- Norme NIST : Blocs de 512 bits, empreinte de 160 bits
- 80 rondes sur 5 sous-blocs de 32 bits A, B, C, D, E

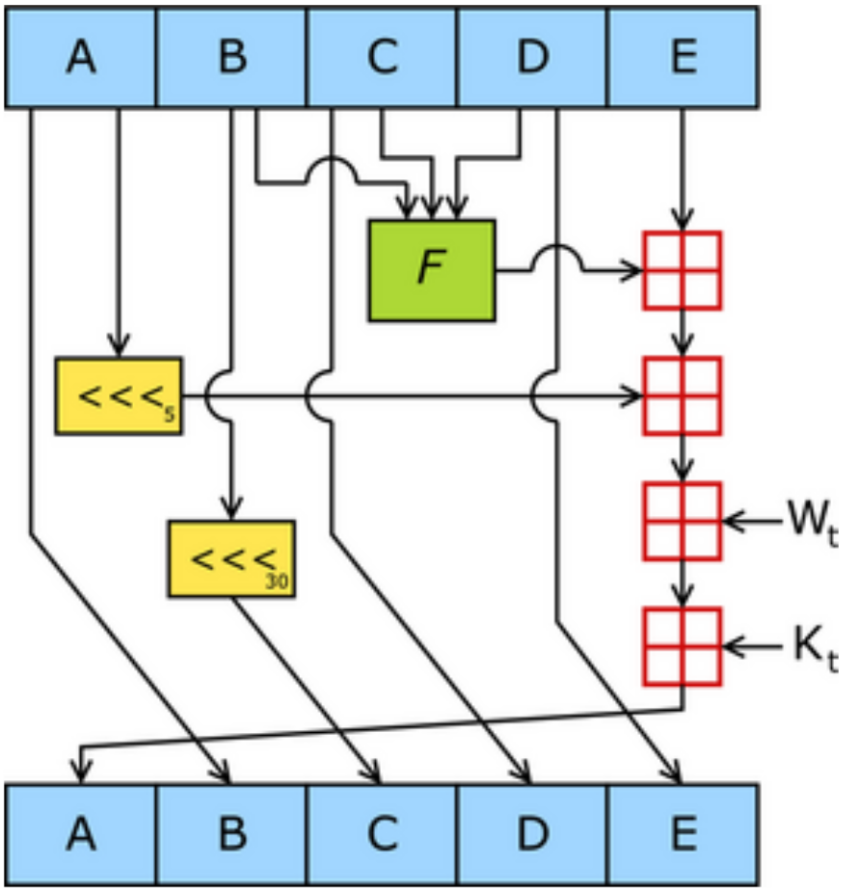
Fonction SHA-1 (1994)

- Considéré comme plus sûr que MD5 face aux collisions
  - Force brute : $\mathcal{O}(2^{80})$ (attaque anniversaires)
  - Attaque théorique en $O(2^{63})$ [Wang05]
  - Encore largement utilisé (signatures)

Fonction SHA-2 (2000)

- Blocs de 512 bits, empreinte de 256 bits
  - Force brute : $\mathcal{O}(2^{128})$ (attaque anniversaires)
  - Pas d'attaque connues pour le moment

La fonction de compression de SHA-1



Application : Stockage de mot de passe

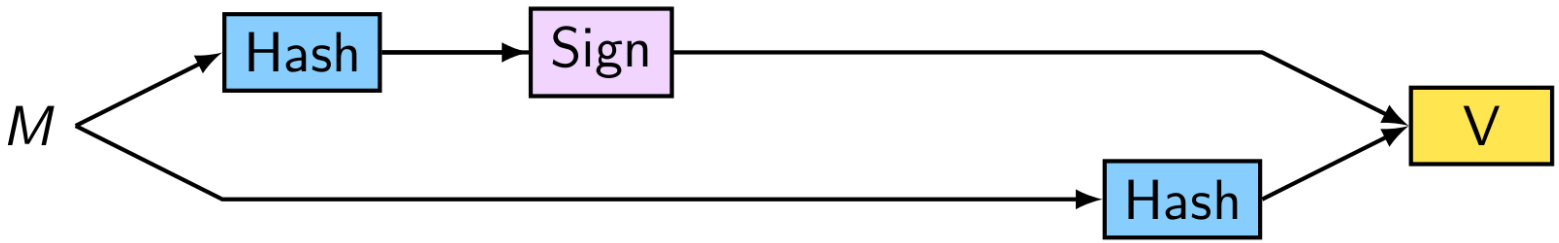
Problémematique

- Connection et identification sur un site : login + mot de passe
- Logins et mots de passe enregistrés dans une base de données
- Risque : acces à la base de données $\Rightarrow$ usurpation d'identité !

Solution : Utilisation de fonctions de hachage

- Pour pallier à cette faille, **les empreintes** des mots de passe sont stockés dans la base de données
- À chaque identification, vous produirez votre mot de passe dont l'empreinte sera calculée et comparée à celle stockée dans la base de données.
- La résistance à la préimage assure la difficulté de produire un mot de passe définissant la même empreinte !

Application : Signatures



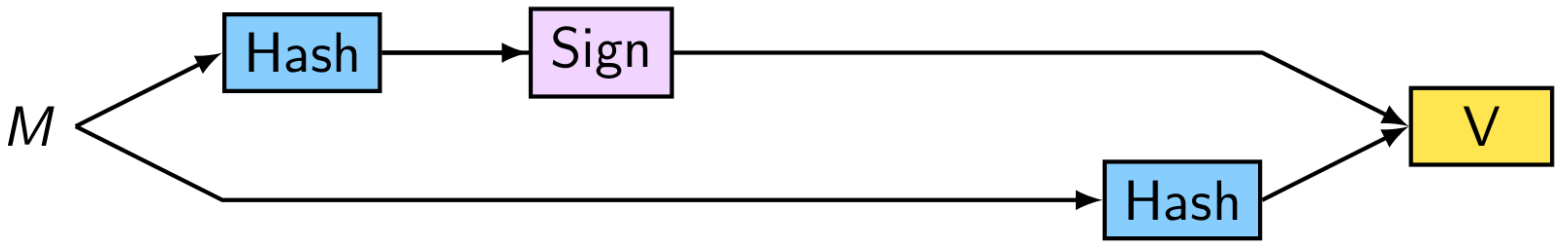
Idée : Hash & Sign

Au lieu de signer le message trés long, on signe un condensé du message

Fonctionnement

- La signature fonctionne sur le condensé de taille fixe
- Chaque condensé doit être unique ! ?
  Impossible !

Application : Signatures



Conséquences

Attaque en second antécédent :

- À partir d'un message signé, on en trouve un autre avec le même condensé $\Rightarrow$ la signature reste valide

Attaque en collision :

- À partir d'une collision $H(m_1) = H(m_2)$, on demande la signature du message m_1 $\Rightarrow$ c'est aussi valide pour m_2
- On répudie la signature de m_1 et prétendre avoir signé m_2

Analyse de sécurité

Que souhaite-t-on ?

- Un adversaire ne doit pas pouvoir signer à la place du signataire :
  - un message quelconque ("67fc 3a90 b245")
  - un message de son choix ("Dette = 256,000 $")
- Un adversaire ne doit pas pouvoir retrouver la clé privée
  - à partir de la clé publique
  - à partir de signatures interceptées
  - ... ou qu'il aurait "choisies"

Analyse de sécurité

Remarque

La sécurité inconditionnelle n'existe pas en signature !

- il est toujours possible de tester toutes les signatures possibles jusqu'à obtenir une vérification correcte
- cela vient du fait que l'algorithme de vérification est public
- la sécurité sera toujours calculatoire

Prouver la sécurité

Goldwasser, Micali and Rivest

Modèle de sécurité

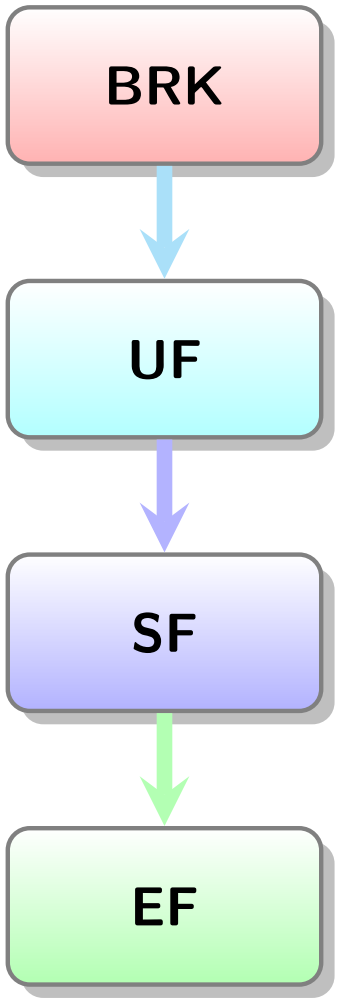
1. **les buts de l'attaquant**
   ce qu'il cherche à obtenir $\Rightarrow$ le niveau de sécurité souhaité
2. **les moyens de l'attaquant**
   ce que peut faire l'adversaire $\Rightarrow$ puissance de l'attaque

Paramètres du modèle

Buts de l'attaquant

1. **BRK – Cassage total** : retrouver la clé secrete de signature
2. **UF – Forge universelle** : signer n'importe quel message
3. **SF – Forge sélective** : signer un message choisi
4. **EF – Forge existentielle** : signer un message quelconque

Hiérarchie de sécurité

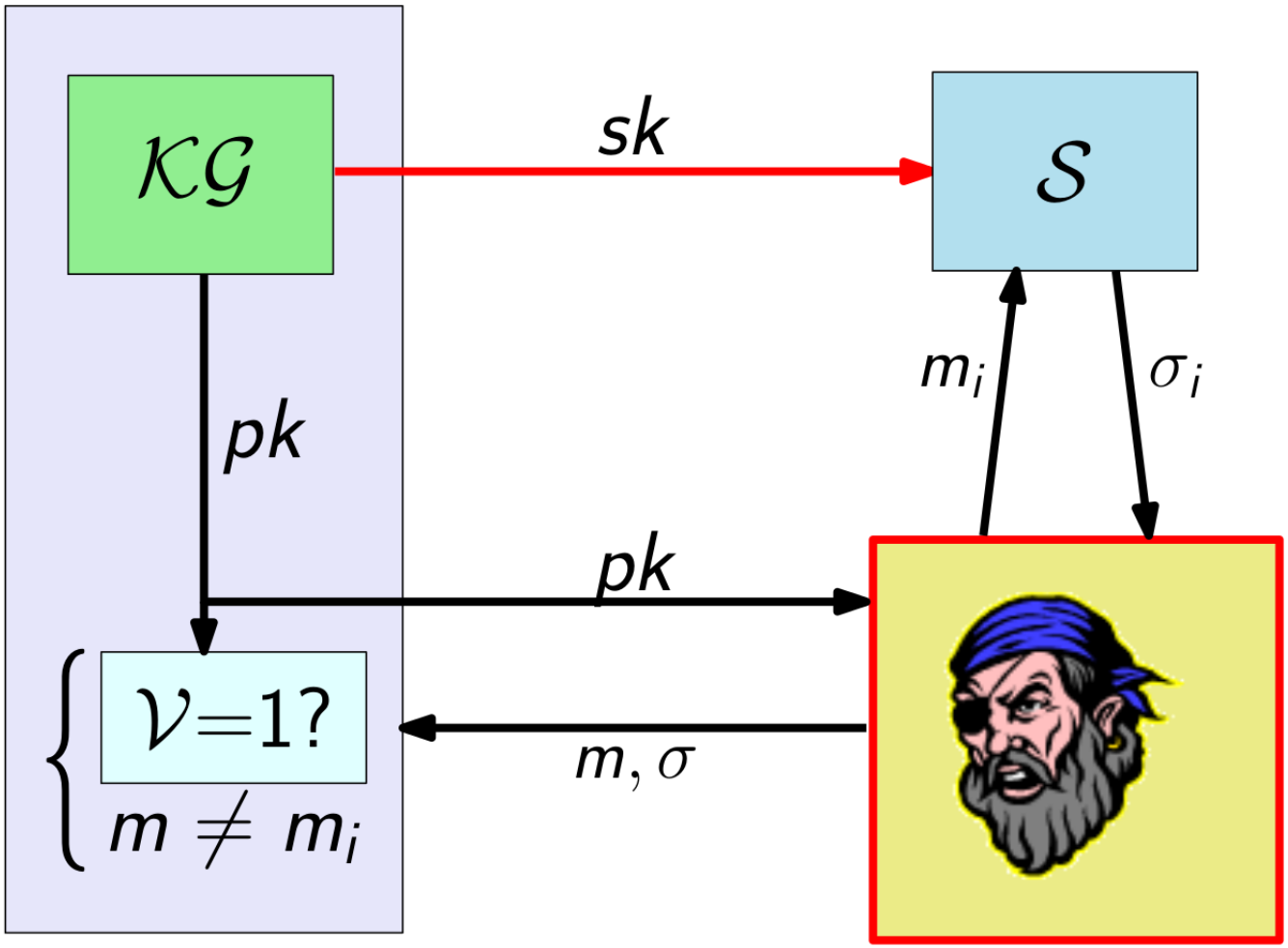


Paramètres du modèle

Moyens de l'attaquant

1. **KO – Key-Only** : il ne voit aucun message
2. **KMA – Messages connus** : il intercepte une liste de messages signés
3. **CMA – Messages choisis** : il peut faire signer des messages choisis

Sécurité EF-CMA



Modèle de sécurité

Attaques possibles

Modèle de sécurité = un but + des moyens

Exemple

- Sécurité **EF-CMA** (Existential Forgery, Chosen Message Attack)

Absence de forge existentielle sous une attaque à messages choisis adaptative

Prendre le cas de la signature RSA : quel niveau peut-on espérer atteindre ?

Analyse de sécurité pour σRSA

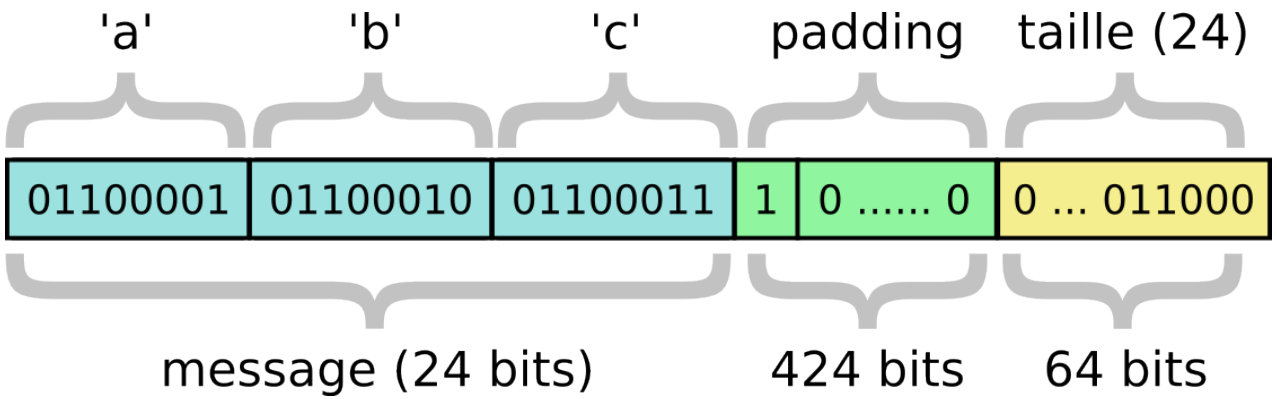
Signature σRSA

- **Clés :** $\mathsf{pk} = e \qquad \mathsf{sk} = d$
- **Signer :** $\sigma = m^d \pmod{n}$
- **Vérifier :** $m \stackrel{?}{=} \sigma^e \pmod{n}$

Vulnérabilités

- **EF-KO** – Existentiellement falsifiable par attaque sans message :
  - étant donné σ, l'attaquant calcule $m = \sigma^e$
- **UF-CMA** – Universellement falsifiable par attaque à messages choisis :
  - l'attaquant fais signer $m/2$ et 2 et en déduit une signature pour m

Solution : Padding



L'encodage (bourrage, encapsulation)

Permet de briser la propriété de multiplicativité

- les attaques basiques sont rendues inopérantes
- le message est encapsulé dans un certain format
- chaîne de bits fixe accolée au message
- codage d'une propriété du message (checksum, longueur, etc.)
- chaîne de bits variable mais avec redondance

Signature RSA avec Hachage Plein

FDH : Full-Domain Hash

Hash-and-Sign

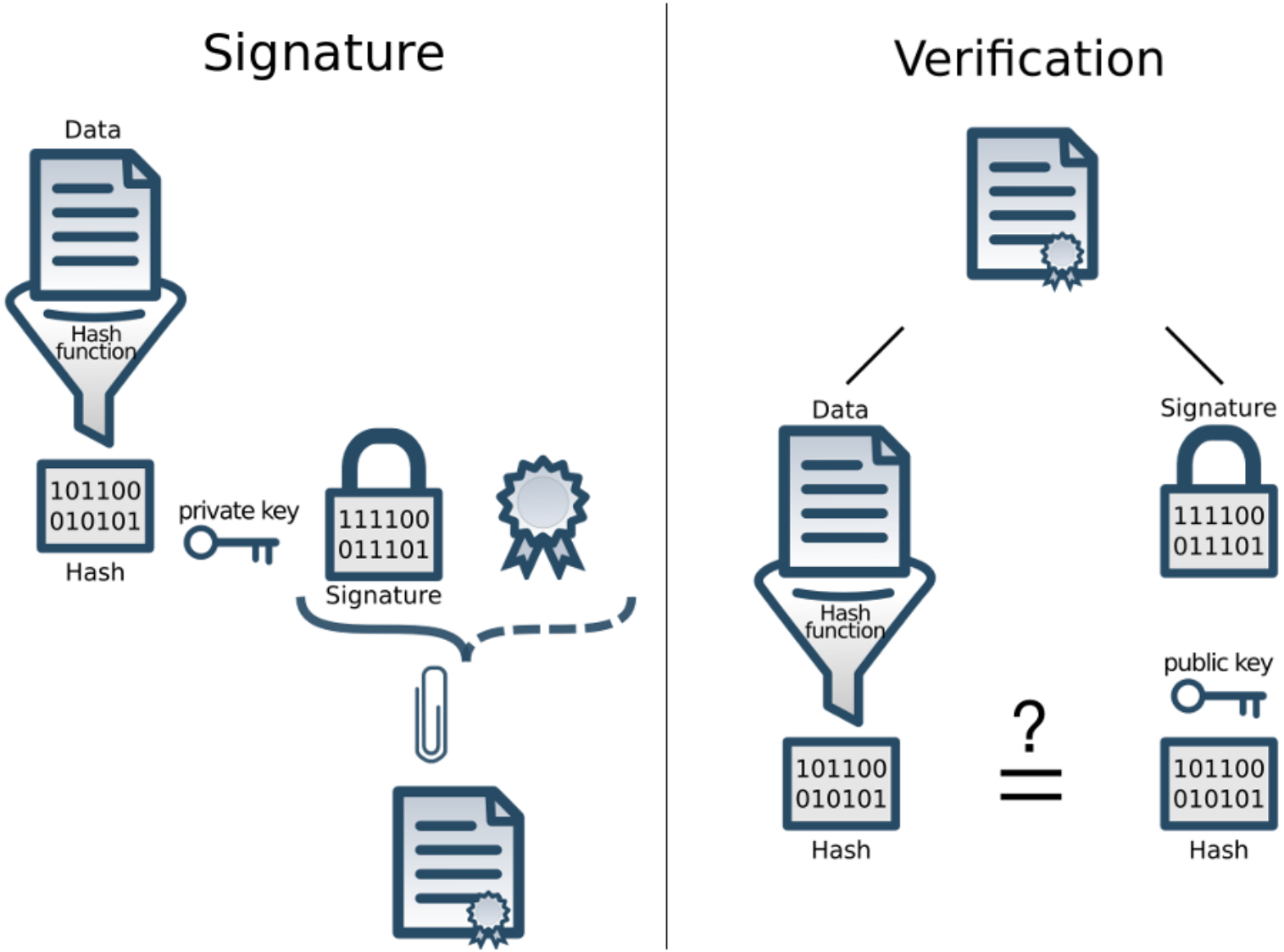
Cette méthode suppose que l'on dispose d'une fonction de hachage produisant comme empreintes des entiers modulo n.

- on calcule le condensé du message avant de signer
- le hachage joue le rôle de l'encodage

Pour signer un message m, on calcule

$$\sigma = H(m)^d$$

Signature et hachage



Signature RSA-FDH

Sécurité

Le schéma a été prouvé sûr par Bellare et Rogaway en 1996

- sécurité EF-CMA
- sous l'hypothèse de dificulté du problème RSA
- dans le modèle de l'oracle aléeatoire

Inconvénients

- La réduction proposée donne une borne mauvaise (i.e., on est obligé de prendre des grands paramètres)
- Pour une probabilité de forge de 2^{-80} avec 2^{60} calculs de hachage, la taille du module RSA doit être de 4096 bits.
- Preuve améliorée en 2000 par Coron : un module de 2048 bits est suffisant