Exercices du cours: Structures et Algorithmes Aléatoires

cours 3-4 du 30 octobre et 6 novembre 2009.

1. Identité de Wald: Soit $T, X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires intégrables indépendantes à valeur dans $\mathbb{N}_+$. Les X_i, $i \geq 1$ sont identiquement distribués. On définit $S = X_1 + \cdots + X_T$. Montrer que $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[T]$.

2. Calculez, pour le processus de branchement, la moyenne m_n et la variance σ_n^2 du nombre d'individus X_n de la n-ème génération, lorsque $X_0 = 1$ et lorsque $X_0 = k > 1$.

3. Soit A une matrice $n \times m$ avec des coefficients dans $\{0, 1\}$. Soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

   On cherche un vecteur $b \in \{-1, 1\}^m$ qui minimize $\|Ab\|_\infty = \max_{i=1,\ldots n} |c_i|$. Pour ceci on utilise un algorithme aléatoire très simple: chaque coefficient de b est choisi aléatoirement et indépendamment avec $\mathbb{P}(b_i = 1) = \mathbb{P}(b_i = -1) = 1/2$. Montrer que pour ce choix du vecteur b, on a

$$\mathbb{P}(\|Ab\|_\infty \geq \sqrt{4m \ln n}) \leq \frac{2}{n}.$$

4. Soit H, un graphe avec v sommets et e arêtes. On appelle $\rho(H) = e/v$ la densité de H. Le graphe H est dit équilibré si pour tout sous-graphe H', on a $\rho(H') \leq \rho(H)$. On considère un graphe équilibré H avec v sommets et e arêtes. Soit $A(G)$ l'événement: H est un sous-graphe (non nécessairement induit) de G. On veut montrer que $p(n) = n^{-v/e}$ est la fonction seuil pour A. Pour tout ensemble S de v éléments, soit A_S l'événement $G|_S$ contient H comme sous-graphe et $X_S = \mathbf{1}(A_S)$. Calculer la moyenne de $X = \sum_{|S|=v} X_S$ et en déduire que si $p << n^{-v/e}$ alors $X = 0$ presque toujours. On considère maintenant le cas $p >> n^{-v/e}$. Montrer que pour des ensembles S, T avec $|S \cap T| = i$, on a: $\mathbb{P}(A_T|A_S) = O(p^{e-(ie/v)})$ et conclure.