Exercices du cours: Structures et Algorithmes Aléatoires
cours 1 du 16 octobre 2009.

1. Vous avez 3 pièces dont une est biaisée: vous savez qu'elle tombe sur pile avec probabilité 2/3. Vous ne savez pas quelle pièce est biaisée mais vous faites un tirage avec chacune des pièces et la première et seconde pièces tombent sur pile tandis que la troisième tombe sur face. Quelle est la probabilité que la première pièce soit celle qui est biaisée?

2. Dans le cas vu en cours de la multiplication matricielle. Sans information sur A, B, C, on fait l'hypothèse a priori que $\mathbb{P}(AB = C) = 1/2$. On fait tourner une fois l'algorithme vu en cours qui nous retourne le résultat: $AB = C$. Avec cette nouvelle information quelle est la probabilité a posteriori que l'identité soit correcte? Et après k itérations de l'algorithme ?

3. Une coupe dans un graphe est un ensemble d'arêtes qui une fois retiré rend le graphe déconnecté. Une coupe minimale est une coupe de cardinalité minimale. La contraction d'une arête $\{u, v\}$ consiste à rassembler u et v en un seul sommet en éliminant toutes les arêtes entre u et v mais en gardant toutes les autres arêtes du graphe. Le graphe ainsi obtenu peut contenir des arêtes parallèles mais pas de boucle sur un sommet. Vérifier qu'une coupe d'un graphe obtenu après une contraction d'arête est encore une coupe du graphe original. On considère alors l'algorithme qui consiste en $n-2$ étapes où n est le nombre de sommets du graphe et qui à chaque itération, choisit une arête uniformément au hasard et la contracte. A la fin des $n-2$ itérations, le graphe obtenu est un graphe à deux sommets et l'algorithme retourne l'ensemble des arêtes connectant ces deux somments. Montrer que cet algorithme retourne une coupe minimale avec probabilité au moins $2/n(n-1)$.

4. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers du type $6n + 5$ (résultat utilisé dans la dernière preuve donnée en cours).

5. Voici une preuve non probabiliste du théorème vu en cours sur les ensembles dominants d'un graphe G de degré minimal $\delta > 1$. Pour chaque sommet v, on note $C(v)$ l'ensemble constitué de v et de ses voisins. On dit que v couvre $C(v)$. Un ensemble dominant pour le graphe $G = (V, E)$ est un ensemble U tel que $V = \cup_{u\in U} C(u)$. On considère l'algorithme déterministe qui à chaque étape choisit le sommet qui couvre un maximum de sommets qui ne sont pas encore couverts. Soit U_t l'ensemble des sommets choisis depuis le début jusqu'à l'étape t. Soit $r_t = |V \setminus \cup_{u\in U_t} C(u)|$. Montrer qu'à l'étape t, il existe un sommet v qui appartient à au moins $r_t(\delta+1)/n\ C(u)$ avec $u \in V \setminus \cup_{u\in U_t} C(u)$. En déduire que $r_{t+1} \le r_t(1-(\delta+1)/n)$. Retrouver le résultat donné en cours.

6. Un hypergraphe est une paire $H = (V, E)$ où V est un ensemble fini de sommets et E est une famille de sous-ensembles de V appelés (hyper)arêtes. Un hypergraphe est n-uniforme si chaque arête contient exactement n sommets. On dit qu'un hypergraphe est 2-coloriable si il existe un 2-coloriage de V tel qu'aucune arête ne soit monochromatique. Soit $m(n)$ le nombre minimal possible d'arêtes d'un hypergraphe n-uniforme qui n'est pas 2-coloriable. Montrer que tout hypergraphe n-uniforme avec moins de 2^{n-1} arêtes est 2-coloriable, donc que $m(n) \ge 2^{n-1}$. On cherche maintenant une borne supérieure sur $m(n)$. On fixe V avec v points, v sera optimisé plus tard. Soit χ un coloriage de V en deux couleurs. Soit $S \subset V$ un ensemble de n points

choisi uniformément. Montrer que $\mathbb{P}(S \text{ est monochromatique sous } \chi) \geq p$ avec $p = \frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}}$. Soit $S_1, \ldots, S_m$ des ensembles de n points choisis de manière uniforme et indépendante. Pour chaque coloriage χ, soit A_χ l'événement: aucun des S_i n'est monochromatique. Montrer que $\mathbb{P}(\cup_\chi A_\chi) \leq 2^v(1-p)^m$ et donc que $m(n) \leq m$. Montrer que $m = \lceil \frac{v \ln 2}{p} \rceil$ convient. On doit donc trouver v qui minimise v/p. Pour ceci on utilisera l'approximation:

$$p = \frac{2\binom{v/2}{n}}{\binom{v}{n}} = 2^{1-n} \prod_{i=0}^{n} \frac{v-2i}{v-i} \sim 2^{1-n} e^{-n^2/2v}.$$

En déduire que $m(n) < (1+o(1))\frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n$.