Chapitre 8

Chaînes de Markov

8.1 La matrice de transition

Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\geq 0}$ à valeurs dans l'espace dénombrable E est appelé *processus stochastique* (à temps discret) (à valeurs dans E). L'ensemble E est l'*espace d'état*, dont les éléments seront notés i, j, k... Lorsque $X_n = i$, le processus est dit *être dans*, ou *visiter*, l'état i au temps n.

Les suites de variables aléatoires IID sont bien des processus stochastiques, mais du point de vue de la modélisation, elles ne sont pas satisfaisantes, ne prenant pas en compte la dynamique des systèmes en évolution, du fait de l'indépendance. Pour introduire cette dynamique, il faut tenir compte de l'influence du passé, ce que font les chaînes de Markov, à la façon des équations de récurrence dans les systèmes déterministes. En fait, les chaînes de Markov sont des processus stochastiques dont l'évolution est régie par une équation de récurrence du type $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$, où $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est une suite IID indépendante de la valeur initiale X_0 (voir plus bas). Cette structure extrêmement simple suffit à générer une grande variété de comportements. C'est pour cela que les chaînes de Markov trouvent des applications dans beaucoup de domaines comme, par exemple, la biologie, la physique, la sociologie, la recherche opérationnelle et les sciences de l'ingénieur, où elles donnent des réponses qualitatives aussi bien que quantitatives aux problèmes posés.

Voici la définition :

Définition 8.1.1 *Si pour tout entier $n \geq 0$ et tous états $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$,*

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\,, \tag{8.1}$$

le processus $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est appelé chaîne de Markov. *Celle-ci est dite* homogène *si le second membre de (8.1) ne dépend pas de n.*

On abrègera “chaîne de Markov homogène” par “CMH”.

La propriété (8.1) est la *propriété de Markov*.

La matrice $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in E}$, où

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

est la *probabilité de transition* de i vers j, est appellée *matrice de transition* de la chaîne. Comme ses éléments sont des probabilités et puisqu'une transition a nécessairement lieu d'un état vers un autre état, on a

$$p_{ij} \geq 0, \text{ et } \sum_{k\in E} p_{ik} = 1$$

pour tous états i, j. Une matrice $\mathbf{P}$ indexée par E et satisfaisant les propriétés ci-dessus est appelée *matrice stochastique*.

L'espace d'état peut être infini et par conséquent une telle matrice n'est pas du type étudié en algèbre linéaire. Toutefois, l'addition et la multiplication sont définies par les mêmes règles formelles. Par exemple, avec $A = \{a_{ij}\}_{i,j\in E}$ et $B = \{b_{ij}\}_{i,j\in E}$, le produit $C = AB$ est la matrice $\{c_{ij}\}_{i,j\in E}$, où $c_{ij} = \sum_{k\in E} a_{ik}b_{kj}$. La notation $x = \{x_i\}_{i\in E}$ représente formellement un vecteur *colonne* et x^T est donc un vecteur ligne, le transposé de x. Par exemple, $y = \{y_i\}_{i\in E}$ donné par $y^T = x^T A$ est défini par $y_i = \sum_{k\in E} x_k a_{ki}$. Semblablement, $z = \{z_i\}_{i\in E}$ donné par $z = Ax$ est défini par $z_i = \sum_{k\in E} a_{ik}z_k$.

Une matrice de transition $\mathbf{P}$ est parfois représentée par son *graphe de transition* G, un graphe dont les nœuds sont les états de E et qui a une arête orientée de i vers j si et seulement si $p_{ij} > 0$, auquel cas cette arête est ornée de l'étiquette p_{ij}.

La propriété de Markov (8.1) s'étend facilement (voir l'Exercice 8.5.2) comme suit

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+k} = j_k \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+k} = j_k \mid X_n = i) \end{aligned} \tag{8.2}$$

pour tous $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j_1, \ldots, j_k$. En notant

$$A = \{X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+k} = j_k\}, \quad B = \{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\},$$

la dernière égalité se lit $P(A \mid X_n = i, B) = P(A \mid X_n = i)$, et celle-ci se lit à son tour

$$P(A \cap B \mid X_n = i) = P(A \mid X_n = i)P(B \mid X_n = i).$$

Donc, A et B sont conditionnellement indépendants sachant $X_n = i$. Tel est le contenu du :

Théorème 8.1.1 *Pour tout $i \in E$, $n \geq 1$, le futur au temps n et le passé au temps n sont conditionnellement indépendants étant donné l'état présent $X_n = i$.*

Voir cependant l'Exercice 8.5.1.

Le Théorème 8.1.1 montre en particulier que la propriété de Markov est indépendante de la direction du temps.

La distribution d'une CMH

La distribution au temps n de la chaîne est le vecteur $\nu_n = \{\nu_n(i)\}_{i\in E}$, où

$$\nu_n(i) = P(X_n = i).$$

La règle des causes totales donne $\nu_{n+1}(j) = \sum_{i\in E} \nu_n(i)p_{ij}$, c'est-à-dire, sous forme matricielle, $\nu_{n+1}^T = \nu_n^T \mathbf{P}$. En itérant cette égalité, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$\nu_n^T = \nu_0^T \mathbf{P}^n. \tag{8.3}$$

La matrice $\mathbf{P}^n$ est appelée *matrice de transition en n étapes* car son terme général n'est autre que

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i).$$

En effet, d'après la règle de Bayes séquentielle et en tenant compte de la propriété de Markov, on trouve pour le second membre de la dernière égalité

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}\in E} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}\,,$$

qui est bien le terme général de la n-ème puissance de la matrice $\mathbf{P}$.

Par convention, $\mathbf{P}^0 =$ la matrice identité ($p_{i,j}(0) = 1_{\{i=j\}}$).

La variable X_0 est *l'état initial*, et sa distribution de probabilité ν_0 est la *distribution initiale*. La règle de Bayes séquentielle donne :

$$\begin{aligned}P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k)\\ = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\cdots P(X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_0 = i_0)\,,\end{aligned}$$

et donc, dans le cas d'une CMH,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) = \nu_0(i_0)p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{k-1}i_k}. \tag{8.4}$$

La donnée de (8.4) pour tout $k \geq 0$ et tous états $i_0, i_1, \ldots, i_k$ constitue la *distribution de probabilité* de la CMH. Donc :

Théorème 8.1.2 *La distribution de probabilité d'une* CMH *est entièrement déterminée par sa distribution initiale et sa matrice de transition.*

Notation. On abrègera $P(A \mid X_0 = i)$ en $P_i(A)$. Pour toute probabilité μ sur E, on notera $P_\mu(A) = \sum_{i\in E} \mu(i)P(A|X_0 = i)$. C'est la probabilité qui régit l'évolution de la chaîne lorsque la distribution initiale est μ.

Récurrences markoviennes

Nombre de CMH sont décrites par une équation de récurrence contrôlée par un "bruit blanc". Plus précisément,

Théorème 8.1.3 *Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite* IID *de variables aléatoires à valeurs dans un espace arbitraire G. Soit E un espace dénombrable, et soit une fonction $f : E \times G \to E$. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E, indépendante de la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. L'équation de récurrence*

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}) \tag{8.5}$$

définit alors une CMH.

Démonstration. L'itération de (8.5) montre que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction g_n telle que $X_n = g_n(X_0, Z_1, \dots, Z_n)$, et donc $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(f(i, Z_{n+1}) = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(f(i, Z_{n+1}) = j)$, puisque l'événement $\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\}$ est exprimable en termes de $X_0, Z_1, \dots, Z_n$ et est donc indépendant de Z_{n+1}. Semblablement, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(i, Z_{n+1}) = j)$. On a donc une chaîne de Markov, qui est de plus homogène, puisque le second membre de la dernière égalité ne dépend pas de n. Explicitement :

$$p_{ij} = P(f(i, Z_1) = j). \tag{8.6}$$

□

Exemple 8.1.1: Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, take 1. Soit X_0 une variable à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables IID indépendante de X_0, prenant les valeurs $+1$ ou -1, et de distribution de probabilité commune

$$P(Z_n = +1) = p,$$

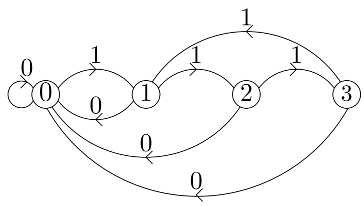
où $0 < p < 1$. Le processus $\{X_n\}_{n\geq 1}$ défini par

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$$

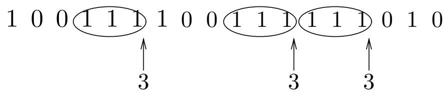
est, au vu du Théorème 8.1.3, une CMH, appelée *marche aléatoire* sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 8.1.2: Automates stochastiques. Un *automate fini* $(E, \mathcal{A}, f)$ peut lire les lettres d'un *alphabet fini* $\mathcal{A}$ écrites sur un ruban infini. Cet automate se trouve à un instant donné dans un quelconque des *états* d'un ensemble fini E, et son évolution est régie par une fonction $f : E \times \mathcal{A} \to E$ comme suit. Quand l'automate est dans l'état $i \in E$ et lit la lettre $a \in \mathcal{A}$, il passe de l'état i à l'état $j = f(i, a)$ et lit sur le ruban la prochaine lettre à droite de celle qu'il vient de lire.

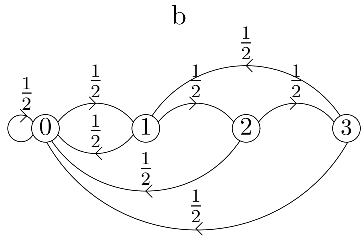
Un automate est représenté par son graphe de transition G ayant pour nœuds les états de E. Il y a une arête orientée du nœud (état) i au nœud j si et seulement s'il existe $a \in \mathcal{A}$



a



b



c

Un automate stochastique

tel que $j = f(i, a)$, et cette arête reçoit alors l'étiquette a. Si $j = f(i, a_1) = f(i, a_2)$ pour $a_1 \neq a_2$, il y a alors 2 arêtes orientées de i vers j avec les étiquettes a_1 et a_2, ou, plus économiquement, une seule arête orientée avec l'étiquette (a_1, a_2). Plus généralement, une arête orientée donnée peut avoir des étiquettes multiples à tous ordres.

Considérons à titre d'exemple l'automate avec l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ correspondant au graphe de transition de la Figure a. L'automate, initialisé dans l'état 0, lit la suite de la Figure b de gauche à droite, passant successivement dans les états (y compris l'état initial 0)

$$0\,1\,0\,0\,1\,2\,3\,1\,0\,0\,1\,2\,3\,1\,2\,3\,0\,1\,0\,.$$

Il apparaît que l'automate est dans l'état 3 après avoir lu trois 1 successifs qui ne chevauchent pas un bloc de trois 1 consécutifs précédemment enregistré (voir Figure b), et seulement dans cette circonstance.

Si la suite de lettres lues par l'automate est $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, la suite des états $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est alors donnée par l'équation de récurrence $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ et donc, si $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID et indépendante de l'état initial X_0, alors $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est, au vu du Théorème 8.1.3, une CMH. Son graphe de transition est représenté dans la Figure c.

Toutes les CMH ne reçoivent pas une description "naturelle" du type de celle du Théorème 8.1.3. Cependant une telle description est toujours possible dans le sens suivant :

Théorème 8.1.4 *À toute matrice stochastique* $\mathbf{P}$ *sur* E*, on peut associer une* CMH $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *avec cette matrice pour matrice de transition, et admettant une représentation comme dans le Théorème 8.1.3.*

Démonstration. On identifiera E à $\mathbb{N}$. On pose

$$X_{n+1} = j \text{ si } \sum_{k=0}^{j-1} p_{X_n k} < Z_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{j} p_{X_n k}\,,$$

où $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID, uniformément distribuée sur $(0,1]$. On peut appliquer le Théorème 8.1.3, et on vérifie que cette CMH a la matrice de transition requise (Formule (8.6)). □

Cette représentation est utile pour simuler de *petites* (avec un petit espace d'état) CMH. Elle a également un intérêt théorique. En particulier, lorsqu'on cherche à démontrer une propriété qui concerne la distribution d'une CMH, on peut toujours supposer que celle-ci admet une représentation comme dans le Théorème 8.1.3. Cette remarque sera utile à plusieurs reprises.

Toutes les CMH ne reçoivent pas de manière "naturelle" une description du type donné dans le Théorème 8.1.3. Une légère modification de ce théorème en élargit considérablement la portée.

Théorème 8.1.5 *Considérons la situation du Théorème 8.1.3, sauf en ce qui concerne la distribution de* $X_0, Z_1, Z_2, \ldots$. *On suppose à la place que* F *est dénombrable et que pour tout* $n \geq 0$, Z_{n+1} *est conditionnellement indépendant de* $Z_n, \ldots, Z_1, X_{n-1}, \ldots, X_0$ *sachant* X_n*, c'est-à-dire : pour tout* k, $k_1, \ldots, k_n \in F$, $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i \in E$,

$$P(Z_{n+1} = k \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0, Z_n = k_n, \ldots, Z_1 = k_1) = P(Z_{n+1} = k \mid X_n = i),$$

où la dernière quantité est indépendante de n*. Alors,* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *est une* CMH *dont les probabilités de transition sont données par la formule :*

$$p_{ij} = P(f(i, Z_1) = j \mid X_0 = i).$$

Démonstration. Exercice 8.5.3. □

EXEMPLE 8.1.3: L'URNE D'EHRENFEST, TAKE 1. Ce modèle simplifié de diffusion à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes à différentes températures, et ainsi de mieux comprendre le phénomène d'irréversibilité thermodynamique (Exemple 8.3.1).

Il y a N particules qui peuvent se trouver dans le compartiment A ou le compartiment B. Supposons qu'au temps $n \geq 0$, $X_n = i$ particules sont dans A. On choisit alors une particule au hasard, et cette particule est alors transférée du compartiment où elle se trouvait dans l'autre. Le prochain état du système, X_{n+1}, est donc, soit $i-1$ (la particule déplacée fut trouvée dans le compartiment A) avec la probabilité $\frac{i}{N}$, soit $i+1$ (elle fut trouvée dans B) avec la probabilité $\frac{N-i}{N}$.

Ce modèle relève du Théorème 8.1.5. Pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},$$

où $Z_n \in \{-1, +1\}$ et $P(Z_{n+1} = -1 \mid X_n = i) = \frac{i}{N}$. Les termes non nuls de la matrice de transition sont donc

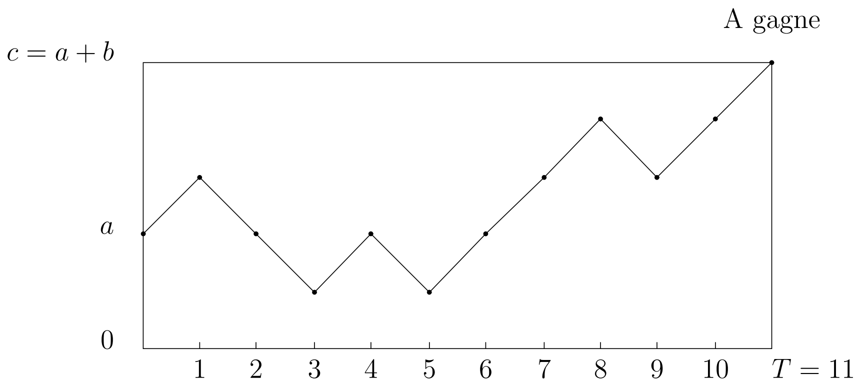
$$p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N} \ , \ p_{i,i-1} = \frac{i}{N}.$$

Analyse à un pas

Certaines fonctionnelles de CMH, en particulier les probabilités d'absorption par un ensemble d'états A fermé ($\sum_{j \in A} p_{ij} = 1$ pour tout $i \in A$) et les temps moyens avant absorption, peuvent être évalués grâce à la méthode appelée *analyse à un pas*. Cette technique, qui est le moteur de la plupart des calculs en théorie des chaînes de Markov, va être illustrée par les exemple suivants.

EXEMPLE 8.1.4: LA RUINE DU JOUEUR, TAKE 1. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face, où la probabilité de face est $p \in (0,1)$, et les tirages successifs sont IID. Si on note X_n la fortune du joueur A au temps n, alors $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, où $Z_{n+1} = +1$ (resp., -1) avec probabilité p (resp., $q = 1-p$), et $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID. En d'autres mots, A parie 1 euro sur face à chaque lancer, et B parie la même chose sur pile. Le processus $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est donc la marche aléatoire de l'Exemple 8.1.1. Les fortunes initiales de A et B sont respectivement a et b. Le jeu se termine dès qu'un des deux joueurs est ruiné.

La durée du jeu est T, le premier temps n auquel $X_n = 0$ ou c, et la probabilité que A gagne est $u(a) = P(X_T = c \mid X_0 = a)$.



La ruine du joueur B

Au lieu de calculer seulement $u(a)$, l'analyse à un pas calcule

$$u(i) = P(X_T = c \mid X_0 = i)$$

pour tout i, $0 \leq i \leq c$, et pour ce faire, elle génère une équation de récurrence pour les $u(i)$ en décomposant l'événement "A gagne" selon les éventualités du premier lancer, et en utilisant la règle des causes totales. Si $X_0 = i$, $1 \leq i \leq c-1$, alors $X_1 = i+1$ (resp., $X_1 = i-1$) avec probabilité p (resp., q), et la probabilité de ruine de B sachant que A a une fortune initiale $i+1$ (resp., $i-1$) est $u(i+1)$ (resp., $u(i-1)$). Donc, pour tout i, $1 \leq i \leq c-1$,

$$u(i) = pu(i+1) + qu(i-1),$$

avec les conditions aux frontières $u(0) = 0$, $u(c) = 1$.

L'équation caractéristique associée à cette équation de récurrence linéaire est $pr^2 - r + q = 0$. Elle a deux racines distinctes, $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$, si $p \neq q$, et une racine double, $r_1 = 1$, si $p = q = \frac{1}{2}$. La solution générale est donc $u(i) = \lambda r_1^i + \mu r_2^i = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^i$ quand $p \neq q$, et $u(i) = \lambda r_1^i + \mu i r_1^i = \lambda + \mu i$ lorsque $p = q = \frac{1}{2}$. Tenant compte des conditions aux frontières, on peut calculer λ et μ. Le résultat est, pour $p \neq q$,

$$u(i) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^i}{1 - (\frac{q}{p})^c},$$

et pour $p = q = \frac{1}{2}$,

$$u(i) = \frac{i}{c}.$$

Dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$, la probabilité $v(i)$ que B gagne quand la fortune initiale de B est $c - i$ est obtenue en remplaçant i par $c - i$ dans l'expression de $u(i)$. Ce qui donne $v(i) = \frac{c-i}{c} = 1 - \frac{i}{c}$. On vérifie que $u(i) + v(i) = 1$, ce qui signifie en particulier que la probabilité pour que le jeu ne s'éternise pas est 1. Le lecteur est invité à vérifier qu'il en est de même pour $p \neq q$.

Exemple 8.1.5: La ruine du joueur, take 2. (suite de l'Exemple 8.1.4) La durée $m(i) = E[T \mid X_0 = i]$ du jeu quand la fortune initiale du joueur A est i vérifie l'équation de récurrence

$$m(i) = 1 + pm(i+1) + qm(i-1)$$

lorsque $1 \leq i \leq c-1$. En effet, la pièce doit être lancée au moins une fois, et avec la probabilité p (resp., q) la fortune de A sera $i+1$ (resp., $i-1$), et donc $m(i+1)$ (resp., $m(i-1)$) lancers supplémentaires seront en moyenne nécessaires pour finir le jeu. Les conditions aux frontières sont

$$m(0) = 0, m(c) = 0.$$

Réécrivons l'équation de récurrence sous la forme $-1 = p(m(i+1) - m(i)) - q(m(i) - m(i-1))$. Notant

$$y_i = m(i) - m(i-1),$$

on a, pour $1 \le i \le c-1$,

$$-1 = py_{i+1} - qy_i$$

et

$$m(i) = y_1 + y_2 + \cdots + y_i.$$

Nous allons résoudre cette équation de récurrence avec $p = q = \frac{1}{2}$. Pour cela, on la réécrit

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1, \\ -1 &= \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2, \\ &\vdots \\ -1 &= \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_{i-1}, \end{aligned}$$

et donc, en sommant,

$$-(i-1) = \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_1,$$

c'est-à-dire, pour $1 \le i \le c$,

$$y_i = y_1 - 2(i-1).$$

Reportant cette expression dans $m(i) = y_1 + y_2 + \cdots + y_i$, et observant que $y_1 = m(1)$, on obtient

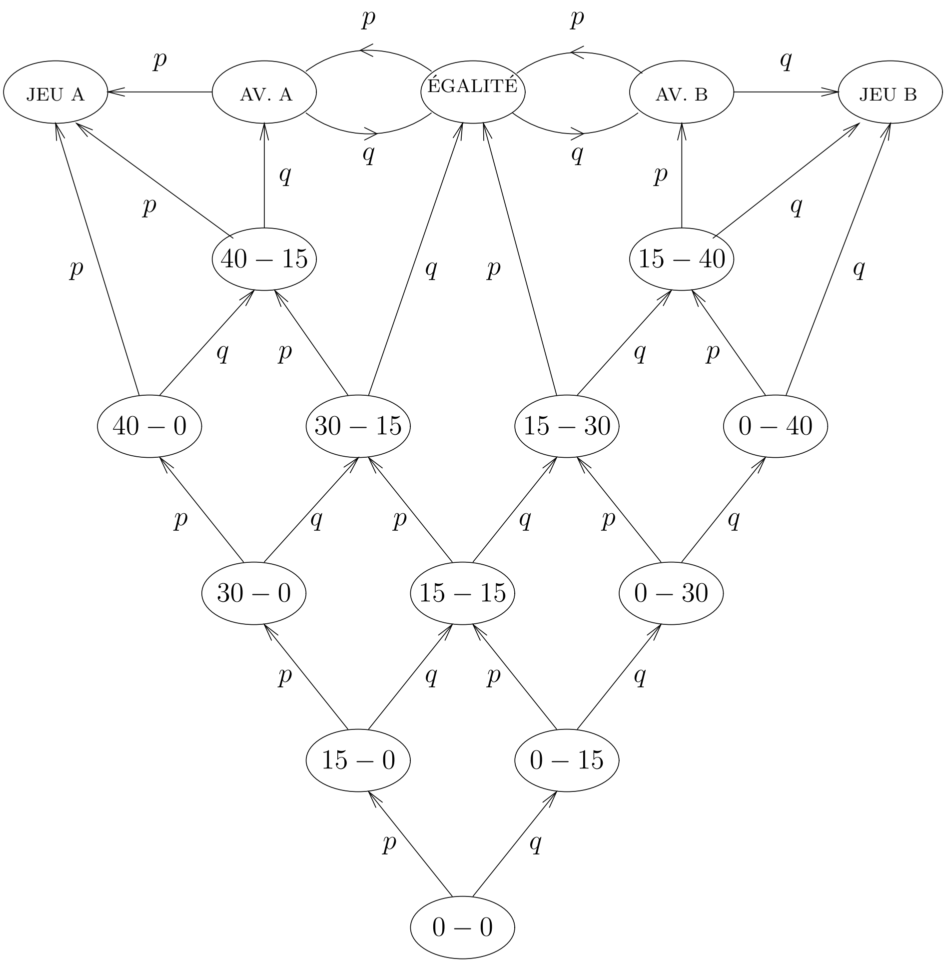
$$m(i) = im(1) - 2[1 + 2 + \cdots + (i-1)] = im(1) - i(i-1).$$

La condition $m(c) = 0$ donne $cm(1) = c(c-1)$ et donc, finalement,

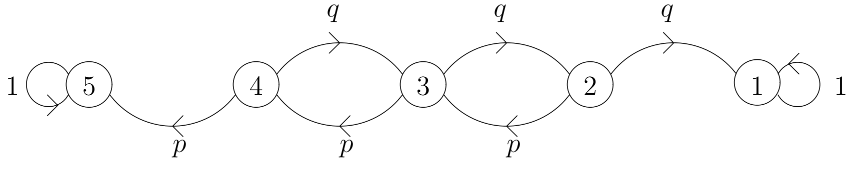
$$m(i) = i(c-i).$$

Exemple 8.1.6: Récréation : Tennis. Au tennis, si on ignore les "tie-breaks", un "jeu" peut être modélisé par une CMH dont le graphe de transition est donné par la figure ci-dessous, où p est la probabilité que le serveur A gagne le point, et $q = 1 - p$. On veut calculer la probabilité pour que B remporte le jeu.

On voit sur la figure qu'un jeu comporte deux étapes : on atteint d'abord un des états supérieurs du graphe et ensuite, on reste dans les états supérieurs jusqu'à l'absorption en "jeu pour A" ou "jeu pour B." En modifiant les noms des états supérieurs, le graphe de la CMH de la deuxième étape est donné par la Figure b.



a



b

Tennis : un jeu sans la règle du *tie-break*

L'analyse à un pas donne pour b_i, la probabilité pour que B gagne sachant que la deuxième étape débute en i,

$$b_1 = 1 \ , \ b_5 = 0$$

et

$$\begin{aligned} b_2 &= q + pb_3, \\ b_3 &= qb_2 + pb_4, \\ b_4 &= qb_3. \end{aligned}$$

pour $p \neq q$,

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \left(1 \ , \ q\frac{1-pq}{1-2pq} \ , \ \frac{q^2}{1-2pq} \ , \ \frac{q^3}{1-2pq} \ , \ 0\right).$$

Si on débute en 0-0, B gagne avec la probabilité $\sum_{i=1}^5 p(i)b_i$, où $p(i)$ est la probabilité que la deuxième étape débute en i. Une simple énumération des chemins allant de 0-0 à l'état supérieur 1 donne $p(1) = q^4 + q^3pq + q^2pq^2 + qpq^3 + pq^4$, c'est-à dire,

$$p(1) = q^4(1 + 4p).$$

Le lecteur pourra terminer les calculs.

Distribution stationnaire

Définition 8.1.2 *Une distribution de probabilité π satisfaisant l'equation de* balance globale

$$\pi^T = \pi^T \mathbf{P} \tag{8.7}$$

est appelée distribution stationnaire *de la matrice de transition* $\mathbf{P}$*, ou de la* CMH.

L'equation de balance globale dit que pour tout état i,

$$\pi(i) = \sum_{j \in E} \pi(j) p_{ji}.$$

L'itération de (8.7) donne $\pi^T = \pi^T \mathbf{P}^n$ pour tout $n \geq 0$, et donc, au vu de (8.3), si la distribution initiale $\nu = \pi$, alors $\nu_n = \pi$ pour tout $n \geq 0$: si une chaîne a pour distribution initiale la distribution stationnaire, elle garde cette distribution pour toujours. Mais il y a plus. En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} P(X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k) &= P(X_n = i_0) p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{k-1} i_k} \\ &= \pi(i_0) p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{k-1} i_k} \end{aligned}$$

ne dépend plus n. C'est dans ce sens qu'on dit que la chaîne est *stationnaire*. On dit aussi qu'elle se trouve en *régime stationnaire*, ou en *équilibre*. En résumé :

Théorème 8.1.6 *Si la distribution initiale d'une* CMH *est la distribution stationnaire, la* CMH *est stationnaire.*

L'équation de balance globale $\pi^T\mathbf{P} = \pi^T$, et la relation $\pi^T\mathbf{1} = 1$ (où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1) qui exprime que π est une probabilité, donnent, lorsque E est fini, $|E| + 1$ équations avec $|E|$ variables. Une de ces $|E|$ équations est superflue sous la contrainte $\pi^T\mathbf{1} = 1$. En effet, si on fait la somme des équations de $\pi^T\mathbf{P} = \pi^T$ on obtient $\pi^T\mathbf{P}\mathbf{1} = \pi^T\mathbf{1}$, c'est-à-dire, $\pi^T\mathbf{1} = 1$.

Exemple 8.1.7: Chaîne à 2 états. L'espace d'état est $E = \{1, 2\}$ et la matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Les équations de balance globale sont

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(1)(1-\alpha) + \pi(2)\beta, \\ \pi(2) &= \pi(1)\alpha + \pi(2)(1-\beta). \end{aligned}$$

Ce système dépendant se réduit à une seule équation $\pi(1)\alpha = \pi(2)\beta$, à laquelle il faut ajouter $\pi(1) + \pi(2) = 1$ qui exprime que π est une probabilité. On obtient

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Exemple 8.1.8: L'urne d'Ehrenfest, take 2. (suite de l'Exemple 8.1.3) Les équations de balance globale sont pour i, $1 \le i \le N-1$,

$$\pi(i) = \pi(i-1)\left(1 - \frac{i-1}{N}\right) + \pi(i+1)\frac{i+1}{N}$$

et pour les états extrêmes,

$$\pi(0) = \pi(1)\frac{1}{N}, \quad \pi(N) = \pi(N-1)\frac{1}{N}.$$

Laissant $\pi(0)$ indéterminé, on résout les équations pour $i = 0, 1, \dots, N$ successivement pour obtenir

$$\pi(i) = \pi(0)\binom{N}{i}.$$

La quantité $\pi(0)$ est alors déterminée en écrivant que π est un vecteur de probabilité :

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi(i) = \pi(0)\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i} = \pi(0)2^N.$$

Ceci donne pour π distribution binomiale de taille N et de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\pi(i) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{i}.$$

C'est la distribution qu'on obtiendrait en plaçant indépendamment les particules dans les compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque compartiment.

Les distributions stationnaires peuvent être nombreuses. Ainsi, si on prend la matrice de transition qui est la matrice unité, toute probabilité sur l'espace d'état est une probabilité stationnaire. Il se peut aussi qu'il n'y ait pas de probabilité stationnaire (voir l'Exercice 8.5.10).

EXEMPLE 8.1.9: PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT, I. De tels processus généralisent le modèle de diffusion d'Ehrenfest. L'espace d'état est $E = \{0, 1, \dots, N\}$, et la matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & & & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & q_i & r_i & p_i & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & q_{N-1} & r_{N-1} & p_{N-1} \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $p_i > 0$ et $q_i > 0$ pour tout état i tel que $1 \leq i \leq N-1$. Les équations de balance globale pour les états $i \neq 0$, N sont :

$$\pi(i) = p_{i-1}\pi(i-1) + r_i\pi(i) + q_{i+1}\pi(i+1),$$

et pour les états 0 et N :

$$\pi(0) = \pi(1)q_1, \qquad \pi(N) = \pi(N-1)p_{N-1}$$

(barrières réfléchissantes). En remarquant que $r_i = 1 - p_i - q_i$ et en regroupant des termes, on a, pour $2 \leq i \leq N-1$,

$$\pi(i+1)q_{i+1} - \pi(i)p_i = \pi(i)q_i - \pi(i-1)p_{i-1}$$

et

$$\begin{aligned} \pi(1)q_1 - \pi(0) &= 0, \\ \pi(2)q_2 - \pi(1)p_1 &= \pi(1)q_1 - \pi(0). \end{aligned}$$

Donc, $\pi(1)q_1 = \pi(0)$, et pour $2 \le i \le N-1$,

$$\pi(i)q_i = \pi(i-1)p_{i-1}.$$

Ceci donne

$$\pi(1) = \pi(0)\frac{1}{q_1},$$

et pour $2 \le i \le N$,

$$\pi(i) = \pi(0)\frac{p_1p_2\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}. \tag{8.8}$$

L'inconnue $\pi(0)$ est déterminée par l'égalité $\sum_{i=0}^{N}\pi(i) = 1$ (π est une probabilité), ce qui donne,

$$\pi(0)\left\{1 + \frac{1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1q_2} + \cdots + \frac{p_1p_2\cdots p_{N-1}}{q_1q_2\cdots q_{N-1}q_N}\right\} = 1. \tag{8.9}$$

Retournement du temps

Les notions de retournement de temps et de réversibilité sont très productives en théorie des chaînes de Markov.

Soit $\{X_n\}_{n\ge 0}$ une CMH de matrice de transition $\mathbf{P}$ admettant une distribution stationnaire π positive ($\pi(i) > 0$ pour tout état i). La matrice $\mathbf{Q}$, indexée par E, définie par

$$\pi(i)q_{ij} = \pi(j)p_{ji}\,, \tag{8.10}$$

est une matrice stochastique. En effet,

$$\sum_{j\in E} q_{ij} = \sum_{j\in E}\frac{\pi(j)}{\pi(i)}p_{ji} = \frac{1}{\pi(i)}\sum_{j\in E}\pi(j)p_{ji} = \frac{\pi(i)}{\pi(i)} = 1,$$

où la troisième égalité tient compte des équations de balance globale. Elle reçoit l'interprétation suivante : supposons que la distribution initiale soit π, auquel cas pour tout $n \ge 0$, tout $i \in E$,

$$P(X_n = i) = \pi(i).$$

Alors la formule de rétrodiction de Bayes donne

$$P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = \frac{P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)P(X_n = j)}{P(X_{n+1} = i)},$$

c'est-à-dire, au vu de (8.10),

$$P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = q_{ji}.$$

On voit que $\mathbf{Q}$ est la matrice de transition de la chaîne quand on “retourne le temps”.

L'observation qui suit est promue au rang de théorème à cause de son efficacité.

Théorème 8.1.7 *Soit* $\mathbf{P}$ *une matrice stochastique indexée par l'ensemble dénombrable* E*, et soit* π *une distribution de probabilité positive sur* E*. Si la matrice* $\mathbf{Q}$ *indexée par* E *et définie par (8.10) est une matrice stochastique (la somme de chacune des lignes est égale à 1), alors* π *est une distribution stationnaire de* $\mathbf{P}$*.*

Démonstration. Pour $i \in E$ fixé, on somme les égalités (8.10) par rapport à $j \in E$, ce qui donne

$$\sum_{j\in E} \pi(i)q_{ij} = \sum_{j\in E} \pi(j)p_{ji}.$$

Mais le membre de gauche de cette égalité égale $\pi(i)\sum_{j\in E} q_{ij} = \pi(i)$, et donc, pour tout $i \in E$,

$$\pi(i) = \sum_{j\in E} \pi(j)p_{ji}.$$

□

Définition 8.1.3 *On appelle* réversible *toute chaîne de Markov de distribution initiale* π *(une distribution stationnaire) positive telle que pour tout* $i, j \in E$*,*

$$\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}. \tag{8.11}$$

Dans ce cas, $q_{ij} = p_{ij}$, et donc la chaîne et la chaîne retournée ont la même distribution puisque celle-ci est entièrement déterminée par la distribution initiale et la matrice de transition. Les équations (8.11) sont appelées les *équations de balance detaillée*. Le résultat suivant est un corollaire immédiat du Théorème 8.1.7.

Théorème 8.1.8 *Soit* $\mathbf{P}$ *une matrice de transition sur* E*, et soit* π *une distribution de probabilité sur* E*. Si pour tout* $i, j \in E$*, les équations de balance détaillée (8.11) sont vérifiées, alors* π *est une distribution stationnaire de* $\mathbf{P}$*.*

EXEMPLE 8.1.10: L'URNE D'EHRENFEST, TAKE 3. (suite des Exemples 8.1.3 et 8.1.8) On rappelle qu'on avait obtenu l'expression

$$\pi(i) = \frac{1}{2N}\binom{N}{i}$$

pour la distribution stationnaire. La vérification des équations de balance détaillée

$$\pi(i)p_{i,i+1} = \pi(i+1)p_{i+1,i}$$

est immédiate. L'urne d'Ehrenfest est donc réversible.

EXEMPLE 8.1.11: MARCHE ALÉATOIRE SUR UN GRAPHE. Soit un graphe non orienté où on note E l'ensemble de ses sommets, ou nœuds. Soit d_i le nombre d'arêtes adjacentes au sommet i. Transformons ce graphe en un graphe orienté en décomposant chacune de ses arêtes en deux arêtes orientées de directions opposées, et faisons en un graphe de transition en associant à l'arête orientée de i vers j la probabilité de transition $\frac{1}{d_i}$.

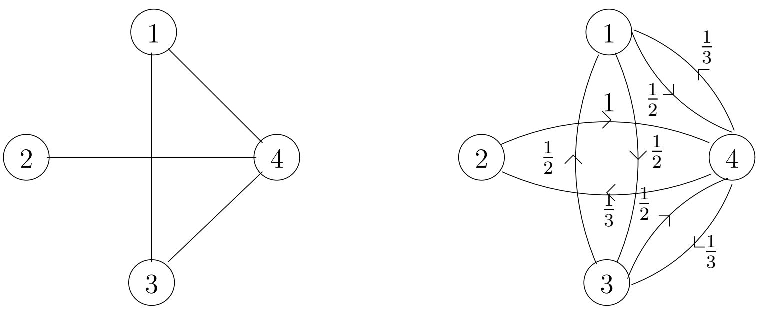
On supposera que $d_i > 0$ pour tout état i (pas de nœud isolé). Une distribution stationnaire (en fait, *la* distribution stationnaire comme nous le verrons bientôt) est donnée par

$$\pi(i) = \frac{d_i}{\sum_{j \in E} d_j}.$$

Pour cela on utilise le Théorème 8.1.8, en faisant le pari que la chaîne est réversible. Il nous faut juste vérifier que

$$\pi(i)\frac{1}{d_i} = \pi(j)\frac{1}{d_j},$$

ce qui est bien le cas.



Marche aléatoire sur un graphe

Communication

Les propriétés que l'on va définir dans cette fin de section (communication et période) sont purement *topologiques*, en ce sens qu'elles concernent le graphe de transition “nu”, c'est-à-dire sans les étiquettes indiquant les probabilités de transition.

Définition 8.1.4 *L'état j est dit* accessible *depuis l'état i s'il existe un entier $M \geq 0$ tel que $p_{ij}(M) > 0$. En particulier, un état i est toujours accessible depuis lui-même, puisque $p_{ii}(0) = 1$. Les états i et j sont dits* communiquer *si i est accessible depuis j* et *si j est accessible depuis i. On note ceci $i \leftrightarrow j$.*

Pour $M \geq 1$, $p_{ij}(M) = \sum_{i_1,\ldots,i_{M-1}} p_{ii_1} \cdots p_{i_{M-1}j}$, et donc $p_{ij}(M) > 0$ si et seulement si il existe au moins un chemin $i, i_1, \ldots, i_{M-1}, j$ de i à j tel que

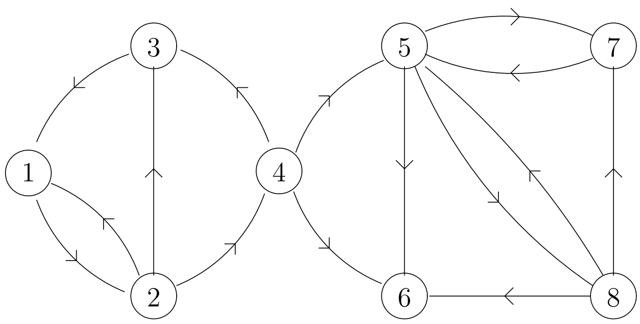
$$p_{ii_1}p_{i_1i_2} \cdots p_{i_{M-1}j} > 0,$$

ou, de manière équivalente, si il existe un chemin orienté de i vers j dans le graphe de transition G. On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} i \leftrightarrow i & \qquad \text{(reflexivité)}, \\ i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i & \qquad \text{(symétrie)}, \\ i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k & \qquad \text{(transivité)}. \end{aligned}$$

Donc la relation de communication ($\leftrightarrow$) est une relation d'équivalence. Elle engendre une partition de l'espace d'état E en classes d'équivalences appelées *classes de communication*.

Définition 8.1.5 *Un état i tel que $p_{ii} = 1$ est dit* fermé. *Plus généralement, un ensemble C d'états tel que $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$ pour tout $i \in C$ est dit* fermé.



Un graphe de transition avec 3 classes de communications

EXEMPLE 8.1.12: UN GRAPHE DE TRANSITION. Le graphe de transition de la figure ci-dessous a trois classes de communication : $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 7, 8\}$, et $\{6\}$. L'état 6 est fermé. La classe de communication $\{5, 7, 8\}$ n'est pas fermée, mais l'ensemble $\{5, 6, 7, 8\}$ l'est.

On observe sur cet exemple qu'il peut y avoir des arêtes orientées reliant deux classes de communication différentes E_k et E_ℓ. Cependant, toutes les arêtes orientées entre deux classes de communication données ont la même orientation, toutes de E_k à E_ℓ ou toutes de E_ℓ à E_k.

Définition 8.1.6 *S'il n'y a qu'une seule classe de communication, la chaîne, sa matrice de transition et son graphe de transition sont dits* irréductibles.

Période

Considérons la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (Exemple 8.1.1). Comme $0 < p < 1$, elle est irréductible. On observe que $E = C_0 + C_1$, où C_0 et C_1, l'ensemble des entiers relatifs pairs et impairs respectivement, ont la propriété suivante. Si on part de $i \in C_0$ (resp., C_1), on ne peut se rendre en une seule étape que dans un état $j \in C_1$ (resp., C_0). La chaîne passe alternativement d'une classe à l'autre. En ce sens, la chaîne a un comportement périodique, correspondant à la période 2. Voici la définition exacte.

Définition 8.1.7 *La* période d_i *de l'état* $i \in E$ *est par définition,*

$$d_i = \text{PGCD}\{n \geq 1 \,;\, p_{ii}(n) > 0\},$$

avec la convention $d_i = +\infty$ *s'il n'y a pas d'indice* $n \geq 1$ *tel que* $p_{ii}(n) > 0$ *(on ne revient pas en* i*). Si* $d_i = 1$*, l'état* i *est dit* apériodique.

Théorème 8.1.9 *Si les états* i *et* j *communiquent, ils ont la même période.*

Démonstration. Comme i et j communiquent, il existe des entiers M et N tels que $p_{ij}(M) > 0$ et $p_{ji}(N) > 0$. Pour tout $k \geq 1$,

$$p_{ii}(M + nk + N) \geq p_{ij}(M)(p_{jj}(k))^n p_{ji}(N)$$

(en effet, un chemin tel que $X_0 = i, X_M = j, X_{M+k} = j, \ldots, X_{M+nk} = j, X_{M+nk+N} = i$ est un des moyens parmi d'autres d'aller de i à i en $M + nk + N$ étapes).

Donc, pour tout $k \geq 1$ tel que $p_{jj}(k) > 0$, on a $p_{ii}(M+nk+N) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, d_i divise $M+nk+N$ pour tout $n \geq 1$, et en particulier, d_i divise k. On a donc montré que d_i divise tout k tel que $p_{jj}(k) > 0$, et en particulier, d_i divise d_j. Par symétrie, d_j divise d_i, et donc, finalement $d_i = d_j$. □

Définition 8.1.8 *Si la chaîne est irréductible, la* période d *commune à tous les états est appelée la période de* $\mathbf{P}$*, ou de la chaîne. Si* $d = 1$*, la matrice de transition et la chaîne sont dites* apériodiques.

Théorème 8.1.10 *Soit* $\mathbf{P}$ *une matrice stochastique irréductible, de période* d*. Alors, pour tous états* $i, j \in E$ *il existe des entiers (dépendant de* i, j*)* $m \geq 0$ *et* $n_0 \geq 0$ *tels que*

$$p_{ij}(m + nd) > 0, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Démonstration. Il suffit de prouver le théorème pour $i = j$. En effet, il existe m tel que $p_{ij}(m) > 0$, parce que j est accessible depuis i, la chaîne étant irreductible, et donc, si pour un $n_0 \geq 0$ on a $p_{jj}(nd) > 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $p_{ij}(m+nd) > p_{ij}(m)p_{jj}(nd) > 0$ pour tout $n \geq n_0$.

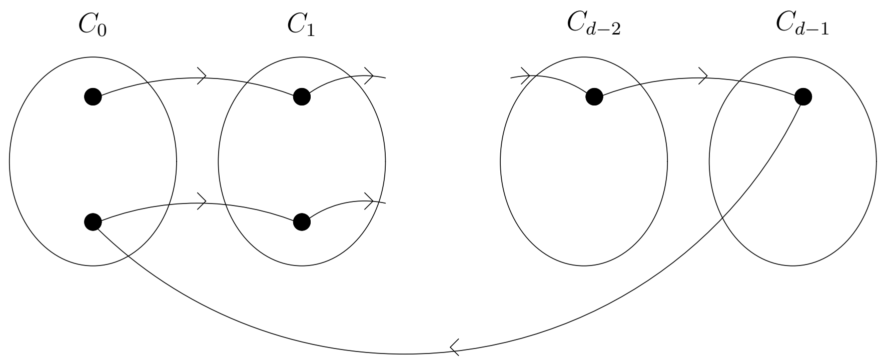
Le reste de la preuve découle d'un résultat classique de la théorie des nombres : tout ensemble A d'entiers positifs qui est fermé par addition et de PGCD d (comme c'est bien le cas pour $A = \{k \geq 1; p_{jj}(k) > 0\}$) contient tous les multiples de d, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. En d'autres termes, dans le cas qui nous intéresse, il existe n_0 tel que $n > n_0$ entraîne $p_{jj}(nd) > 0$. □

Au vu du résultat précédent, il est clair que pour une CMH *irréductible* de période d, on peut trouver une unique partition de E en d classes C_0, C_1, …, C_{d-1} telles que pour tout k, $0 \leq k \leq d$, et tout $i \in C_k$,

$$\sum_{j \in C_{k+1}} p_{ij} = 1,$$

où par convention $C_d = C_0$. Les classes $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ sont les *classes cycliques*.

Considérons une CMH irréductible de période d dont les classes cycliques sont C_0, C_1,…,C_d. En renumérotant les états de E si nécessaire, la matrice de transition a la structure de blocs ci-dessous (où on a choisi $d = 4$ pour être explicite),



Cycles

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & A_0 & 0 & \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

et donc $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$, et $\mathbf{P}^4$ ont aussi une structure de blocs correspondant aux classes C_0, C_1, C_2, C_3 :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \\ B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_0 \\ D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \end{pmatrix},$$

et finalement

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}.$$

On observe deux phénomènes : le décalage des blocs et le fait que $\mathbf{P}^4$ est bloc-diagonale. Ceci est évidemment général : $\mathbf{P}^d$ est bloc-diagonale relativement aux classes cycliques $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$. La matrice de transition à d étapes, $\mathbf{P}^d$, est aussi une matrice stochastique, et les classes cycliques sont des classes de communication de $\mathbf{P}^d$ comme le montre la forme bloc-diagonale de cette dernière matrice.

8.2 Récurrence

Cette section et la suivante sont consacrées à l'étude du comportement à long terme des chaînes de Markov homogènes. Les notions importantes sont celles d'*état récurrent* et d'*état transitoire*. Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une CMH de matrice de transition $\mathbf{P}$. On définit le *temps de retour* en i par

$$T_i = \inf\{n \geq 1;\, X_n = i\},$$

avec la convention usuelle : $\inf \varnothing = \infty$ (Ici : $T_i = \infty$ si $X_n \neq i$ pour tout $n \geq 1$).

Définition 8.2.1 *On dit que l'état i est* récurrent *si $P_i(T_i < \infty) = 1$. Un état i récurrent est dit* récurrent positif *si de plus $E_i[T_i] < \infty$,* récurrent nul *si $E_i[T_i] = \infty$. Un état qui n'est pas récurrent est dit* transitoire.

Pour un état i fixé, notons $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ la suite des temps de retour successifs dans l'état i. Formellement :

$$\begin{aligned} &\tau_1 = T_i \\ &\ldots \\ &\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k\,;\, X_n = i\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Le résultat suivant est intuitif. Sa démonstration fait l'objet de l'Exercice 8.5.14.

Théorème 8.2.1 *Sachant que $\tau_k < \infty$, le processus $\{X_{\tau_k+n}\}_{n\geq 0}$ est une* CMH *de matrice de transition $\mathbf{P}$ indépendante de $\{X_{n\wedge\tau_k}\}_{n\geq 0}$.*

En particulier, si l'état i est récurrent, les “cycles” $\{X_{n+\tau_k}\}_{0\leq n<\tau_{k+1}}$, $k \geq 1$, sont indépendants et identiquement distribués.

Notons $f_{ji} = P_j(T_i < \infty)$ la probabilité de retourner en i en partant de j, et notons

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}$$

le nombre total de visites en i à partir de $n = 1$. On a

$$P_j(N_i = 0) = 1 - f_{ji}$$

et, lorsque $r \geq 1$,

$$P_j(N_i = r) = f_{ji} \times (f_i i)^{r-1} \times (1 - f_{ii}).$$

En effet, en utilisant le Théorème 8.2.1, cette probabilité est égale à la probabilité de visiter i au moins une fois (f_{ji}) multiplié par la probabilité de visiter i encore $r-1$ fois $(f_{ii})^{r-1}$) en succession, et enfin après la r-ème visite, de ne plus jamais revenir en i (probabilité $1 - f_{ii}$). En particulier :

$$P_i(N_i = r) = (f_{ii})^r \times (1 - f_{ii}).$$

On en déduit que :

(a) Si $f_{ii} = 1$, $P_i(N_i = r) = 0$ pour tout $r \geq 0$, et donc $P_i(N_i = \infty) = 1$, et bien entendu $E_i[N_i] = \infty$.

(b) Si $f_{ii} < 1$, on a $\sum_{r=0}^{\infty} P_i(N_i = r) = 1$, et donc $P_i(N_i = \infty) = 0$; d'autre part un calcul élémentaire donne : $E_i[N_i] = \frac{f_{ii}}{1-f_{ii}} < \infty$.

En particulier :

Théorème 8.2.2 *Pour que l'état i soit récurrent, il faut et il suffit que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Démonstration. Les remarques précédant l'énoncé du théorème montrent que $f_{ii} = 1 \Leftrightarrow E_i[N_i] = \infty$. D'autre part,

$$\begin{aligned} E_i[N_i] &= E_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_i[1_{\{X_n=i\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)\,. \end{aligned}$$

□

Le critère de récurrence ci-dessus s'appelle le *critère de la matrice potentiel* car $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)$ est le terme (i,i) de la *matrice potentiel*

$$\mathbf{G} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}^n .$$

EXEMPLE 8.2.1: MARCHE ALÉATOIRE SUR $\mathbb{Z}$, TAKE 2. (suite de l'Exercice 8.1.1) Comme $0 < p < 1$, cette chaîne est irréductible et tous ses états sont de même nature (transitoires ou récurrents). Considérons par exemple l'état 0. On a $p_{00}(2n+1) = 0$ et

$$p_{00}(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n .$$

D'après la formule d'équivalence de Stirling ($n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$), la quantité ci-dessus est équivalente à

$$\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} . \tag{8.12}$$

La nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n)$ est donc la même que celle de la série de terme général (8.12). Si $p \neq \frac{1}{2}$, auquel cas $4p(1-p) < 1$, cette dernière converge, et si $p = \frac{1}{2}$, auquel cas $4p(1-p) = 1$, elle diverge. Donc, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est transiente si $p \neq \frac{1}{2}$, récurrente si $p = \frac{1}{2}$.

Les exemples où l'on peut utiliser le critère de la matrice potentiel pour vérifier si un état est récurrent ou non sont rares. Ce critère va cependant nous servir à démontrer l'important résultat suivant, à savoir que la récurrence est une "propriété de classe" (de communication).

Théorème 8.2.3 *Soit une* CMH *de matrice de transition* $\mathbf{P}$. *Deux états qui communiquent sont, soit tous deux récurrents, soit tous deux transitoires. En particulier, si* $\mathbf{P}$ *est irréductible, les états sont soit tous récurrents, soit tous transitoires. La chaîne (ou sa matrice de transition) est alors dite, respectivement,* récurrente, transiente.

Démonstration. Si i et j communiquent, il existe M et N tels que $p_{ij}(M) > 0$ et $p_{ji}(N) > 0$. Posons $\alpha = p_{ij}(M)p_{ji}(N) > 0$. On a l'inégalité

$$p_{ii}(M+n+N) \geq p_{ij}(M)p_{jj}(n)p_{ji}(N) = \alpha p_{jj}(n) .$$

(En effet, le premier membre est la probabilité d'aller de i en j en exactement $M+n+N$ étapes, tandis que le second membre est la probabilité d'aller de i en j en exactement $M+n+N$ étapes, mais de façon particulière, avec la contrainte que $X_M = j$ et $X_{M+n} = j$.) De même :

$$p_{jj}(N+n+M) \geq \alpha p_{ii}(n).$$

Donc, si i et j communiquent, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)$ ont le même comportement. Les états i et j sont donc, d'après le Théorème 8.2.2, ou bien tous deux transitoires, ou bien tous deux récurrents. □

Critère de la probabilité stationnaire

Le but que l'on se fixe maintenant est de démontrer un critère plus maniable que celui de la matrice potentiel, à savoir, le *critère de la probabilité stationnaire*, qui dit qu'une CMH irréductible est récurrente positive si et seulement si elle admet une distribution stationnaire.

La démonstration passe par des préliminaires concernant la *mesure invariante* d'une CMH irréductible récurrente.

Définition 8.2.2 *Un vecteur* non nul $x = \{x_i\}_{i\in E}$ *de coordonnées non négatives est appelé* mesure invariante *de la matrice stochastique* $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in E}$ *si pour tout* $i \in E$,

$$x_i = \sum_{j\in E} x_j p_{ji}. \tag{8.13}$$

(En notation abrégée, $0 \le x < \infty$ et $x^T\mathbf{P} = x^T$.)

Théorème 8.2.4 *A. Soit* $\mathbf{P}$ *la matrice de transition d'une* CMH *irréductible récurrente* $\{X_n\}_{n\ge 0}$. *Soit* 0 *un état arbitraire et soit* T_0 *le temps de retour en* 0. *On définit, pour tout* $i \in E$, *la quantité*

$$x_i = E_0\left[\sum_{n=1}^{T_0} 1_{\{X_n=i\}}\right]. \tag{8.14}$$

Alors, pour tout $i \in E$,

$$0 < x_i < \infty, \tag{8.15}$$

et x *est une mesure invariante de* $\mathbf{P}$.

B. La mesure invariante d'une matrice stochastique irréductible récurrente est unique à une constante multiplicative près.

C. Une CMH *irréductible récurrente est récurrente positive si et seulement si sa mesure invariante* x *vérifie*

$$\sum_{i\in E} x_i < \infty. \tag{8.16}$$

Démonstration.

A. Faisons deux observations préliminaires. Premièrement, quand $1 \le n \le T_0$, $X_n = 0$ si et seulement si $n = T_0$, et donc

$$x_0 = 1.$$

Deuxièmement,

$$\sum_{i\in E}\sum_{n=1}^{T_0} 1_{\{X_n=i\}} = \sum_{n=1}^{T_0}\left\{\sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}\right\} = \sum_{n\ge 1}^{T_0} 1 = T_0\,,$$

et donc

$$\sum_{i\in E} x_i = E_0[T_0]. \tag{8.17}$$

Passons à la démonstration de (8.13). Pour cela, on introduit la quantité

$${}_0p_{0i}(n) := E_0[1_{\{X_n=i\}}1_{\{n\le T_0\}}] = P_0(X_1 \neq 0, \cdots, X_{n-1} \neq 0, X_n = i).$$

C'est la probabilité que, partant de l'état 0, on visite i au temps n sans être au préalable retourné en 0. On a

$$x_i = E_0\left[\sum_{n\ge 1} 1_{\{X_n=i\}}1_{\{n\le T_0\}}\right],$$

et donc,

$$x_i = \sum_{n\ge 1} {}_0p_{0i}(n). \tag{8.18}$$

On observe que

$${}_0p_{0i}(1) = p_{0i}\,.$$

D'autre part, en utilisant la méthode d'analyse à un pas, pour tout $n \ge 2$,

$${}_0p_{0i}(n) = \sum_{j\neq 0} {}_0p_{0j}(n-1)p_{ji}\,. \tag{8.19}$$

En faisant la somme de toutes ces égalités, et en tenant compte de (8.18), on obtient

$$x_i = p_{0i} + \sum_{j\neq 0} x_j p_{ji},$$

c'est-à-dire (8.13), puisque $x_0 = 1$.

Ensuite, nous montrons que $x_i > 0$ pour tout $i \in E$. En effet, en itérant (8.13), on a $x^T = x^T\mathbf{P}^n$, c'est-à-dire, puisque $x_0 = 1$,

$$x_i = \sum_{j\in E} x_j p_{ji}(n) = p_{0i}(n) + \sum_{j\neq 0} x_j p_{ji}(n).$$

Si x_i était nul pour un $i \in E$, $i \neq 0$, cela impliquerait que $p_{0i}(n) = 0$ pour tout $n \ge 0$, et donc que 0 et i ne communiquent pas, en contradiction avec l'hypothèse d'irréductibilité.

Il reste à montrer que $x_i < \infty$ pour tout $i \in E$. Comme précédemment, on trouve que

$$1 = x_0 = \sum_{j\in E} x_j p_{j0}(n)$$

pour tout $n \ge 1$, et donc, si $x_i = \infty$ pour un i, nécessairement $p_{i0}(n) = 0$ pour tout $n \ge 1$, et ceci contredit à nouveau l'hypothèse d'irréductibilité.

B. Dans la preuve de la partie A, on a montré que pour toute mesure invariante y d'une matrice stochastique irréductible, $y_i > 0$ pour tout $i \in E$. On peut donc définir, pour tout $i, j \in E$, la matrice $\mathbf{Q}$ par

$$q_{ji} = \frac{y_i}{y_j} p_{ij}. \tag{8.20}$$

C'est une matrice de transition, puisque $\sum_{i \in E} q_{ji} = \frac{1}{y_j} \sum_{i \in E} y_i p_{ij} = \frac{y_j}{y_j} = 1$. Le terme général de $\mathbf{Q}^n$ est

$$q_{ji}(n) = \frac{y_i}{y_j} p_{ij}(n). \tag{8.21}$$

En effet, en supposant (8.21) vraie pour n,

$$\begin{aligned} q_{ji}(n+1) &= \sum_{k \in E} q_{jk} q_{ki}(n) = \sum_{k \in E} \frac{y_k}{y_j} p_{kj} \frac{y_i}{y_k} p_{ik}(n) \\ &= \frac{y_i}{y_j} \sum_{k \in E} p_{ik}(n) p_{kj} = \frac{y_i}{y_j} p_{ij}(n+1), \end{aligned}$$

et (8.21) suit par induction.

La matrice $\mathbf{Q}$ est irréductible, puisque $\mathbf{P}$ est irréductible. En effet, au vu de (8.21), $q_{ji}(n) > 0$ si et seulement si $p_{ij}(n) > 0$. Aussi, $p_{ii}(n) = q_{ii}(n)$, et donc $\sum_{n \geq 0} q_{ii}(n) = \sum_{n \geq 0} p_{ii}(n)$, et ceci garantit que $\mathbf{Q}$ est récurrente d'après le critère de la matrice potentiel. Notons $g_{ji}(n)$ la probabilité, relative à la chaîne de matrice de transition $\mathbf{Q}$, de retourner dans l'état i pour la première fois à l'étape n en partant de j. L'analyse à un pas donne :

$$g_{i0}(n+1) = \sum_{j \neq 0} q_{ij} g_{j0}(n)\,. \tag{8.22}$$

En multipliant les deux membres par y_i et en utilisant (8.20), on obtient

$$y_i g_{i0}(n+1) = \sum_{j \neq 0} (y_j g_{j0}(n)) p_{ji}.$$

Rappelons que ${}_0p_{0i}(n+1) = \sum_{j \neq 0} {}_0p_{0j}(n) p_{ji}$, ou encore :

$$y_0 \; {}_0p_{0i}(n+1) = \sum_{j \neq 0} (y_0 \; {}_0p_{0j}(n)) p_{ji}.$$

On voit donc que les suites $\{y_0 \; {}_0p_{0i}(n)\}$ et $\{y_i g_{i0}(n)\}$ vérifient la même équation de récurrence. Leurs premiers termes ($n = 1$), respectivement $y_0 \; {}_0p_{0i}(1) = y_0 p_{0i}$ et $y_i g_{i0}(1) = y_i q_{i0}$, sont égaux, d'après (8.20). Donc, pour tout $n \geq 1$,

$${}_0p_{0i}(n) = \frac{y_i}{y_0} g_{i0}(n).$$

En sommant par rapport à $n \geq 1$ et en utilisant l'égalité $\sum_{n \geq 1} g_{i0}(n) = 1$ ($\mathbf{Q}$ est récurrente), on obtient le résultat annoncé : $x_i = \frac{y_i}{y_0}$.

C. La preuve découle immédiatement de l'égalité (8.17) et de la définition de la récurrence positive. □

Voici enfin le critère de récurrence positive de la probabilité stationnaire.

Théorème 8.2.5 *1. Une* CMH *irréductible est récurrente positive si et seulement si elle admet une probabilité stationnaire π. Dans ce cas, la probabilité stationnaire est unique, et $\pi(i) > 0$ pour tout $i \in E$.*

2. Soit π l'unique distribution stationnaire d'une chaîne irréductible récurrente positive, et soit T_i le temps de retour en i. Alors

$$\pi(i)E_i[T_i] = 1. \tag{8.23}$$

3. Toute CMH *irréductible d'espace d'état* fini *est récurrente positive.*

Démonstration.

1. La partie directe est une conséquence immédiate du Théorème 8.2.4. Pour la réciproque, supposons l'existence d'une distribution stationnaire π. En itérant $\pi^T = \pi^T\mathbf{P}$, on obtient $\pi^T = \pi^T\mathbf{P}^n$, c'est-à-dire, pour tout $i \in E$,

$$\pi(i) = \sum_{j\in E} \pi(j)p_{ji}(n).$$

Si la chaîne était transiente, on aurait, pour tous états i, j,

$$\lim_{n\uparrow\infty} p_{ji}(n) = 0.$$

(En effet, $\lim_{n\uparrow\infty} p_{ji}(n) = \lim_{n\uparrow\infty} E_j[1_{\{X_n=i\}}]$. D'autre part, $\lim_{n\uparrow\infty} 1_{\{X_n=i\}} = 0$ (j est transient) et $1_{\{X_n=i\}} \le 1$, et donc, par convergence dominée, $\lim_{n\uparrow\infty} E_j[1_{\{X_n=i\}}] = 0$.) Puisque $p_{ji}(n)$ est uniformément (en j et n) bornée par 1, on a, par convergence dominée à nouveau,

$$\pi(i) = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{j\in E} \pi(j)p_{ji}(n) = \sum_{j\in E} \pi(j)\left(\lim_{n\uparrow\infty} p_{ji}(n)\right) = 0.$$

Ceci contredit $\sum_{i\in E} \pi(i) = 1$. La chaîne ne peut donc être que récurrente, et d'après le Théorème 8.2.4, partie C, elle est récurrente positive.

La distribution stationnaire π d'une chaîne irréductible récurrente positive est unique (d'après le Théorème 8.2.4, partie B, et le fait que le seul choix du facteur multiplicatif est 1). Aussi, on rappelle que $\pi(i) > 0$ pour tout $i \in E$ (Théorème 8.2.4, partie A).

2. Cette égalité est une conséquence directe de l'expression (8.14) de la mesure invariante. En effet, π est obtenue par normalisation de x : pour tout $i \in E$,

$$\pi(i) = \frac{x_i}{\sum_{j\in E} x_j},$$

et en particulier, pour $i = 0$, en se rappelant que $x_0 = 1$ et en utilisant (8.17),

$$\pi(0) = \frac{x_0}{\sum_{j \in E} x_j} = \frac{1}{E_0[T_0]}.$$

L'état 0 ne jouant pas un rôle spécial dans cette analyse, (8.23) est vraie pour tout $i \in E$.

3. On prouve d'abord la récurrence. Si la chaîne était transiente, alors, pour tout $i, j \in E$,

$$\lim_{n \uparrow \infty} p_{ij}(n) = 0,$$

et donc, puisque l'espace d'état est fini,

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{j \in E} p_{ij}(n) = 0.$$

Mais pour tout n,

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(n) = 1,$$

une contradiction. Donc, la chaîne est récurrente. D'après le Théorème 8.2.4 elle admet une mesure invariante x. Puisque E est fini, $\sum_{i \in E} x_i < \infty$, et donc la chaîne est récurrente positive, d'après le Théorème 8.2.4, partie C. $\square$

Exemple 8.2.2: processus de naissance et de mort, II. Le modèle est le même que celui de l'Exemple 8.1.9, sauf que l'espace d'état est $E = \mathbb{N}$. Les mêmes calculs que précédemment conduisent à l'expression (8.8). Pour que cette solution soit une probabilité, on doit avoir $\pi(0) > 0$. Aussi en écrivant que $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(i) = 1$, on obtient

$$\pi(0) \left\{ 1 + \frac{1}{q_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2 \cdots p_j}{q_1 q_2 \cdots q_{j+1}} \right\} = 1. \tag{8.24}$$

Donc une distribution stationnaire existe si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2 \cdots p_j}{q_1 q_2 \cdots q_{j+1}} < \infty. \tag{8.25}$$

Dans ce cas $\pi(i)$ est donné par (8.8), où $\pi(0)$ est déterminé par (8.24).

Un cas particulier important est

$$E = \mathbb{N}, \quad p_i = p, \quad q_i = 1 - p, \quad r_i = 0$$

où $0 < p < 1$. Il s'agit d'une marche aléatoire du type de l'Exemple 8.1.1 où l'état 0 est "réfléchissant". La condition (8.25) se lit

$$\sum_j \left(\frac{p}{1-p} \right)^i < \infty\,,$$

c'est-à-dire : la chaîne est récurrente positive si et seulement si $p < \frac{1}{2}$.

Exemple 8.2.3: L'atelier de réparation. Durant le jour n, Z_{n+1} machines tombent en panne, et elles sont admises dans l'atelier de réparation dans la journée $n+1$. Chaque jour, une machine parmi celles qui attendent est réparée. Donc, en notant X_n le nombre de machines dans l'atelier au jour n,

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Z_{n+1}, \tag{8.26}$$

où $a^+ = \max(a, 0)$. En particulier, si $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est une suite IID indépendante de l'état initial X_0, alors $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH. En termes de la distribution de probabilité

$$P(Z_1 = k) = a_k,\ k \geq 0,$$

la matrice de transition de cette chaîne est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

En effet, la formule (8.6) donne,

$$p_{ij} = P((i-1)^+ + Z_1 = j) = P(Z_1 = j - (i-1)^+) = a_{j-(i-1)^+}.$$

Nous allons montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'irréducibilité est que $P(Z_1 = 0) > 0$ $(a_0 > 0)$ *et* $P(Z_1 \geq 2) > 0$ $(a_0 + a_1 < 1)$.

L'équation de récurrence (8.26) nous permet de faire les observations suivantes. Si $a_0 = 0$, alors $X_{n+1} \geq X_n$ et il y a donc une probabilité nulle d'aller de i à $i-1$ quel que soit $i \geq 1$. Si $a_0 + a_1 = 1$, alors $X_{n+1} \leq X_n$ et il y a donc une probabilité nulle d'aller de i à $i+1$ quel que soit $i \geq 0$. Donc les deux conditions $a_0 > 0$ et $a_0 + a_1 < 1$ sont *nécéssaires* pour l'irréductibilité.

Elles sont également *suffisantes*. En effet, s'il existe $k \geq 2$ tel que $P(Z_{n+1} = k) > 0$, alors on peut aller de n'importe quel $i > 0$ à $i + k - 1 > i$ ou de $i = 0$ à $k > 0$ avec une probabilité positive. De plus, si $P(Z_{n+1} = 0) > 0$, on peut aller de $i > 0$ à $i - 1$ avec une probabilité positive. En particulier, on peut aller de i à $j < i$ avec une probabilité positive. Donc, pour aller de i à $j \geq i$, on peut procéder par sauts vers le haut de hauteur strictement positive, pour atteindre un état $l \geq i$, et ensuite, dans le cas où $l > i$, descendre par sauts d'une unité vers le bas de l à i. Tout ceci avec une probabilité positive.

Supposons que la chaîne soit irréductible récurrente positive, avec la distribution stationnaire π. Soit z un nombre complexe de module ≤ 1. De (8.26), on tire

$$\begin{aligned} z^{X_{n+1}+1} &= \left(z^{(X_n-1)^+ + 1}\right) z^{Z_{n+1}} \\ &= \left(z^{X_n} 1_{\{X_n>0\}} + z 1_{\{X_n=0\}}\right) z^{Z_{n+1}} \\ &= \left(z^{X_n} - 1_{\{X_n=0\}} + z 1_{\{X_n=0\}}\right) z^{Z_{n+1}}, \end{aligned}$$

et donc

$$zz^{X_{n+1}} - z^{X_n} z^{Z_{n+1}} = (z-1)1_{\{X_n=0\}} z^{Z_{n+1}}.$$

Comme X_n et Z_{n+1} sont indépendantes, $E[z^{X_n} z^{Z_{n+1}}] = E[z^{X_n}] g_Z(z)$, où $g_Z(z)$ est la fonction génératrice de Z_{n+1}, et $E[1_{\{X_n=0\}} z^{Z_{n+1}}] = \pi(0) g_Z(z)$, où $\pi(0) = P(X_n = 0)$. Donc,

$$zE[z^{X_{n+1}}] - g_Z(z)E[z^{X_n}] = (z-1)\pi(0)g_Z(z).$$

Si on est en régime stationnaire, alors $E[z^{X_{n+1}}] = E[z^{X_n}] = g_X(z)$, et donc :

$$g_X(z)\,(z - g_Z(z)) = \pi(0)(z-1)g_Z(z). \tag{8.27}$$

Ceci nous donne $g_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i$, du moins si on dispose de $\pi(0)$. Pour obtenir $\pi(0)$, on dérive (8.27) :

$$g'_X(z)\,(z - g_Z(z)) + g_X(z)\left(1 - g'_Z(z)\right) = \pi(0)\left(g_Z(z) + (z-1)g'_Z(z)\right), \tag{8.28}$$

et on fait $z = 1$, pour obtenir, en tenant compte des identités $g_X(1) = g_Z(1) = 1$ et $g'_Z(1) = E[Z]$,

$$\pi(0) = 1 - E[Z].$$

Comme $\pi(0)$ doit être non négative, ceci conduit à la condition nécessaire de récurrence positive : $E[Z] \leq 1$. En fait, on a nécessairement $E[Z] < 1$. En effet, si $E[Z] = 1$, ce qui implique $\pi(0) = 0$, il découle de (8.27) que

$$g_X(x)(x - g_Z(x)) = 0$$

pour tout $x \in [0,1]$. Mais comme la chaîne est supposée irréductible, le cas $Z_{n+1} \equiv 1$ (c'est-à-dire, $g_Z(x) \equiv x$) est exclus et l'équation $x - g_Z(x) = 0$ a seulement $x = 1$ comme solution quand $g'_Z(1) = E[Z] \leq 1$. Donc $g_X(x) \equiv 0$ pour tout $x \in [0,1)$, et en conséquence $g_X(z) \equiv 0$ sur $\{|z| < 1\}$ (une fonction analytique sur un ouvert ne peut avoir de points d'accumulation de zéros à l'intérieur de cet ouvert, sauf si elle est identiquement nulle). Ceci mène à une contradiction puisque la fonction génératrice d'une variable à valeurs entières ne peut être identiquement nulle.

On a donc démontré qu'une condition nécessaire de récurrence positive est $E[Z] < 1$. Nous allons voir que c'est aussi une condition suffisante. On commence par vérifier que la condition $E[Z] < 1$ entraîne la récurrence. Il suffit de montrer que la probabilité de l'événement A = “non retour en 0 en partant de 0” est nulle. En effet dans A, pour tout n,

$$X_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (Z_k - 1) \geqslant 1$$

et en particulier

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{n} - 1 > 0\,,$$

ce qui donne, en faisant tendre n vers l'infini, d'après la loi forte des grands nombres, $E[Z] \geq 1$. Une contradiction.

Supposons la récurrence, c'est-à-dire, supposons que le temps de retour T_0 est presque sûrement fini. On a l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{T_0} Z_n = (T_0 - 1). \tag{8.29}$$

Observons que

$$\begin{aligned} E\left[Z_n 1_{n\leq T_0}\right] &= E\left[Z_n\right] - E\left[Z_n 1_{n>T_0}\right] \\ &= E\left[Z_n\right] - E\left[Z_n\right] E\left[1_{n>T_0}\right] \\ &= E\left[Z_n\right] E\left[1_{n\leq T_0}\right] , \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'événement $\{n > T_0\}$, qui ne dépend que de $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$, est indépendant de Z_n. On a donc, à partir de (8.29)

$$\begin{aligned} E_0\left[T_0\right] &= 1 + E_0\left[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n 1_{n\leq T_0}\right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_0\left[Z_n 1_{n>T_0}\right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_0\left[Z_n\right] E\left[1_{n\leq T_0}\right] \\ &= 1 + E\left[Z_1\right] \sum_{n=1}^{\infty} E_0\left[1_{n\leq T_0}\right] \\ &= 1 + E\left[Z_1\right] E_0\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{n\leq T_0}\right] \\ &= 1 + E\left[Z_1\right] E_0\left[T_0\right] , \end{aligned}$$

et donc, si $E[Z] < 1$ (en particulier, la chaîne est récurrente),

$$E_0\left[T_0\right] = \left(1 - E\left[Z_1\right]\right)^{-1} < \infty ,$$

et donc la chaîne est récurrente positive.

Si $E[Z] = 1$ (en particulier, la chaîne est récurrente), on ne peut avoir $E_0\left[T_0\right] < \infty$, car alors on aurait $E_0\left[T_0\right] = 1 + E_0\left[T_0\right]$. La chaîne récurrente est donc dans ce cas récurrente nulle.

Reste à examiner le cas $E[Z] > 1$. On sait que cela exclue la récurrence positive. Il se trouve qu'en fait, la chaîne est alors transiente, mais nous ne le démontrerons pas ici.

En résumé, sous la condition d'irréductiblité ($P(Z = 0) > 0$ et $P(Z \geq 2) > 0$) :

A. Si $E[Z] < 1$, la chaîne est récurrente positive et la fonction génératrice de sa distribution stationnaire est

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = (1 - E[Z]) \frac{(z-1) g_Z(z)}{z - g_Z(z)}.$$

B. Si $E[Z] = 1$, la chaîne est récurrente nulle.

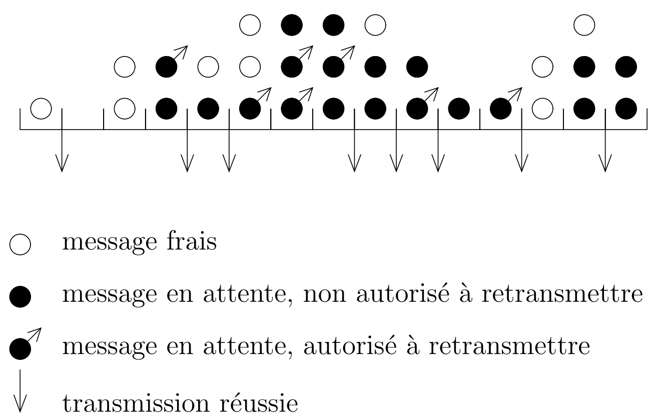
C. Si $E[Z] > 1$, la chaîne est transiente.

EXEMPLE 8.2.4: INSTABILITÉ DU PROTOCOLE ALOHA. Le protocole ALOHA est une méthode d'accès à un canal satellite. C'est un *protocole distribué*, en ce sens que les utilisateurs du canal ne se concertent pas pour éviter les *collisions* (plus d'un message transmis en même temps, auquel cas aucun de ces messages n'est considéré comme transmis, et chacun des messages en collision redemande la transmission à un temps ultérieur, de manière suffisamment intelligente — évidemment pas de retransmission immédiate). Plus précisément, on considère le protocole ALOHA avec fenêtres de transmission périodiques. Ce protocole impose les règles suivantes (voir aussi la figure ci-dessous) :

(i) Les transmissions et retransmissions des messages ont lieu dans des intervalles de temps équidistants, les *slots*, dont la durée est supérieure à celle du temps nécessaire pour transmettre un message. (Ici un message est une suite de longueur fixe de symboles binaires).

(ii) Les messages qui au début d'un *slot* sont en attente de retransmission demandent leur retransmission indépendamment les uns des autres chacun avec la probabilité $\nu \in (0, 1)$.

(iii) Les *messages frais*—ceux qui se présentent pour la première fois— tentent immédiatement de passer.



Le protocole ALOHA

Soit X_n le nombre de *messages en attente de retransmission* au début du *slot* n. La probabilité pour que i parmi $X_n = k$ messages en attente de retransmission demandent la retransmission dans le *slot* suivant est donc

$$b_i(k) = \binom{k}{i} \nu^i (1-\nu)^{k-i}.$$

Soit A_n le nombre de requêtes nouvelles dans le n-ème *slot*. La suite $\{A_n\}_{n\geq 0}$ est supposée IID avec la distribution

$$P(A_n = j) = a_j.$$

La quantité

$$\lambda = E[A_n] = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i$$

est *l'intensité de trafic*. On suppose que $0 < a_0 + a_1 < 1$, ce qui garantit que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH irréductible. Sa matrice de transition est :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= b_1(i)a_0 \text{ si } j = i-1, \\ &= [1-b_1(i)]a_0 + b_0(i)a_1 \text{ si } j = i, \\ &= [1-b_0(i)]a_1 \text{ si } j = i+1, \\ &= a_{j-i} \text{ si } j \geq i+2. \end{aligned}$$

La preuve consiste à comptabiliser les possibilités. Par exemple, la première ligne correspond à un parmi les i messages en attente (de transmission ou de retransmission) qui réussit à passer, et pour cela il faut qu'il y ait soit pas de message nouveau (probabilité a_0) et un seul parmi les i messages en attente qui est admis à retransmettre (probabilité $b_1(i)$). La seconde ligne correspond à un des deux événements suivants : (1), "pas de nouveau message et zéro ou plus de deux requêtes de retransmission parmi les messages en attente" et (2), "un nouveau message et zéro requête de retransmission parmi les messages en attente".

Le but de cet exemple est de démontrer que ce protocole n'est pas stable, en ce sens que la CMH $\{X_n\}_{n\geq 0}$ n'est *pas récurrente positive*. Pour cela, il suffit, d'après le Théoreme 8.3.1 de contredire l'existence d'une distribution stationnaire π.

Si une telle distribution stationnaire existait, elle satisferait aux équations de balance globale

$$\begin{aligned} \pi(i) = \quad & \pi(i)\{[1-b_1(i)]a_0 + b_0(i)a_1\} + \pi(i-1)[1-b_0(i-1)]a_1 \\ & + \pi(i+1)b_1(i+1)a_0 + \sum_{\ell=2}^{\infty} \pi(i-\ell)a_\ell \end{aligned}$$

(où $\pi(i) = 0$ si $i < 0$). Posons

$$P_N = \sum_{i=0}^{N} \pi(i)$$

et faisons la somme des équations de balance globale de $i = 0$ à N. On obtient :

$$P_N = \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + \sum_{\ell=0}^{N} a_\ell P_{N-\ell}\,,$$

qui donne à son tour :

$$P_N(1-a_0) = \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell P_{N-\ell}.$$

Mais comme P_N croit avec N et $\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell = 1-a_0$, nous avons

$$\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell P_{N-\ell} \leq P_{N-1}(1-a_0),$$

et donc

$$P_N(1-a_0) \leq \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + P_{N-1}(1-a_0),$$

d'où il suit que

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{1-a_0-b_0(N)a_1}{b_1(N+1)a_0}.$$

Faisant usage de la forme explicite des $b_i(k)$, on obtient

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{(1-a_0)-(1-\nu)^N a_1}{(N+1)\nu(1-\nu)^N a_0}.$$

Pour toutes les valeurs de $\nu \in (0,1)$, le membre de droite de cette inégalité tend vers l'infini, ce qui contredit $\sum_{N=1}^{\infty} \pi(N) = 1$ et les inégalités $\pi(N) > 0$ que π doit vérifier en tant que distribution stationnaire d'une CMH irréductible.

8.3 Comportement asymptotique

Convergence vers l'équilibre

Considérons une CMH irréductible et récurrente positive. En particulier, si la distribution initiale est la distribution stationnaire, elle conserve cette distribution pour tous les temps. La chaîne est alors dite en *régime stationnaire*.

Quel est son comportement à long terme quand la distribution initiale est arbitraire ? Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 8.3.1 *Soit une* CMH *de matrice de transition* **P** *irréductible, récurrente positive et* apériodique*. Alors, pour tout $j \in E$, et toute distribution initiale μ,*

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(X_n = j) = \pi(j)\,,$$

où π est la distribution stationnaire de la chaîne.

Définition 8.3.1 *Une* CMH *irréductible récurrente positive et* APÉRIODIQUE *est dite* ergodique.

Supposons que l'on trouve un processus $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ tel que $X_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} X'_n$ pour tout $n \geq 0$, et un processus $\{X''_n\}_{n\geq 0}$ tel que $X''_n \overset{\mathcal{D}}{\sim} \pi$ pour tout $n \geq 0$. Alors, le résultat sera démontré si l'on peut prouver que

$$\lim_{n\uparrow\infty} |P(X'_n = i) - P(X''_n = i)| = 0. \tag{8.30}$$

Nous allons construire $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ et $\{X''_n\}_{n\geq 0}$ pour que cette situation ait bien lieu. Nous allons le faire de telle sorte qu'il existe un temps aléatoire presque sûrement fini τ tel que $X'_n = X''_n$ pour tout $n \geq \tau$. On montrera ci-dessous que, dans ce cas,

$$|P(X'_n = i) - P(X''_n = i)| \leq P(\tau > n). \tag{8.31}$$

Alors, la finitude de τ entraîne que $\lim_{n\uparrow\infty} P(\tau > n) = 0$, et le résultat sera donc prouvé. Voici la démonstration de (8.31) :

$$\begin{aligned} P(X'_n = j) - P(X''_n = j) &= P(X'_n = j,\ \tau \leq n) + P(X'_n = j,\ \tau > n) \\ &- P(X''_n = j,\ \tau \leq n) - P(X''_n = j, \tau > n) \\ &= P(X'_n = j,\ \tau > n) - P(X''_n = j,\ \tau > n) \\ &\leq P(X'_n = j,\ \tau > n) \\ &\leq P(\tau > n). \end{aligned}$$

De même, $P(X''_n = j) - P(X'_n = j) \leq P(\tau > n)$.

Il nous reste à construire $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ et $\{X''_n\}_{n\geq 0}$ avec les propriétés annoncées.

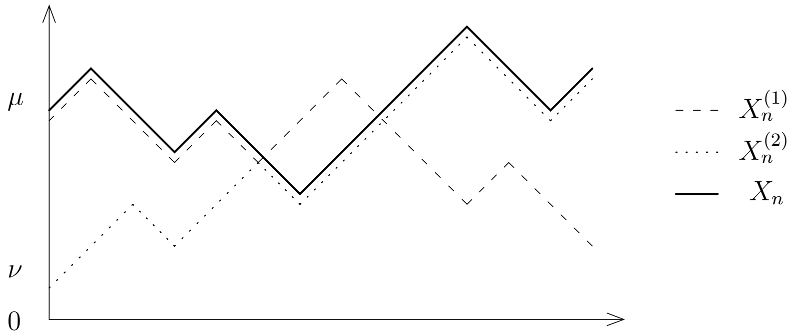
Théorème 8.3.2 *Soit $\{X_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ et $\{X_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ deux* CMH *ergodiques indépendantes de même matrice de transition* $\mathbf{P}$ *et de distributions initiales μ et ν, respectivement. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0;\ X_n^{(1)} = X_n^{(2)}\}$, avec $\tau = \infty$ si les deux chaînes ne se recoupent jamais. Alors τ est en fait presque sûrement fini et, de plus, le processus $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ défini par*

$$X'_n = \begin{cases} X_n^{(1)} & \text{if } n \leq \tau, \\ X_n^{(2)} & \text{if } n \geq \tau \end{cases} \tag{8.32}$$

(voir la figure ci-dessous) est une CMH *de matrice de transition* $\mathbf{P}$.

Démonstration. Considérons la CMH $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ définie par $Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ (*chaîne produit*), prenant ses valeurs dans $E \times E$. Sa probabilité de transition de (i,k) à (j,ℓ) en n étapes est $p_{ij}(n)p_{k\ell}(n)$, elle est irréductible, et elle admet $\{\pi(i)\pi(j)\}_{(i,j)\in E^2}$ comme distribution stationnaire (voir l'Exercice 8.5.16, où le rôle de l'hypothèse d'apériodicité est mis en évidence). D'après le critère de la distribution stationnaire, la chaîne produit est récurrente positive. En particulier, elle atteint la diagonale de E^2 en temps fini, et donc $P(\tau < \infty) = 1$.

Il reste à prouver que le processus $\{X'_n\}_{n\geq 0}$ défini par (8.32) est une CMH de matrice de transition $\mathbf{P}$. Ceci est fait dans l'Exercice 8.5.18. □



EXEMPLE 8.3.1: L'URNE D'EHRENFEST, TAKE 4. (suite des Exemples 8.1.3, 8.1.8 et 8.1.10) La célébrité du modèle d'Ehrenfest est due à l'éclaircissement qu'il apporte au phénomène d'irréversibilité thermodynamique, un sujet de controverses du temps de Boltzmann. Selon la théorie macroscopique de la thermodynamique de ce physicien, les systèmes progressent d'une manière ordonnée vers l'équilibre thermodynamique.

Considérons, par exemple, un système de N particules gazeuses dans une boite divisée en deux compartiments, A et B, séparés par une membrane fictive. Si à l'origine des temps on place toutes les particules dans le compartiment A, ces particules vont se redistribuer, et le système atteint l'équilibre, un état pour lequel les contenus deux compartiments sont thermodynamiquement équivalents. Boltzmann disait qu'il existait une flèche du temps en direction de l'entropie croissante, et en effet dans l'expérience de diffusion modélisée par le modèle des Ehrenfest, l'équilibre thermodynamique correspond à l'entropie maximale du système.

Boltzmann eut un redoutable contradicteur, un certain Zermelo, qui, au vu de la réversibilité dans le temps des lois de la physique, doutait de la flèche du temps évoquée par Boltzmann, ou du moins, demandait une explication. Sa position était renforcée par d'irréfutables mathématiques, en particulier le théorème de récurrence de Poincaré qui prédisait que si l'expérience débutait avec toutes les particules dans le compartiment A, on les retrouverait toutes, tôt ou tard dans le compartiment d'origine. Comme chacun sait, ce comportement n'est jamais observé dans la vie quotidienne, et on n'a jamais vu le sucre dissous dans la tasse de café reprendre sa forme initiale.

La théorie de Boltzmann était mise à mal par ce type d'arguments. Les choses devaient être clarifiées, et elles le furent par Tatiana et Paul Ehrenfest, dont le modèle markovien permit de sauver tout l'édifice.

Ce modèle ne rentre pas dans les détails de la physique du phénomène de diffusion, mais il en conserve les traits essentiels du point de vue de la physique statistique. C'est un système réversible (la chaîne de Markov est réversible) et il est récurrent, repassant une infinité de fois dans n'importe quel état, comme par exemple celui où le compartiment A est vide. L'irréversibilité du système consiste en ceci : en partant d'un état quelconque, la distribution au temps n converge vers la distribution stationnaire[1] qui met pratiquement toute la masse sur les états proches du partage équilibré des particules entre les deux compartiments. Il n'en reste pas moins que ceci n'empêche pas la récurrence et en particulier le retour en l'état 0 (correspondant au compartiment A vide).

Mais en réalité ce retour n'est *pas observable* dans le sens suivant. On peut montrer que le temps moyen pour aller à l'état 0 en partant de $L = \frac{N}{2}$ (on suppose N pair) est

$$\frac{1}{2L}2^{2L}(1 + O(L))$$

tandis que le temps moyen pour aller de L à 0 est inférieur à

$$L + L\log L + O(1).$$

Avec $L = 10^6$ et une unité de temps mathématique égale à 10^{-5} seconde, le retour à l'état L en partant de 0 est de l'ordre d'une seconde, tandis qu'il faudrait de l'ordre de

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \times 2^{2^{10^6}} \text{ secondes}$$

pour passer de L à 0. Il s'agit d'un temps astronomique, et c'est en ce sens que le retour en 0 n'est pas observable.

Ces nombres nous apprennent qu'il est inutile de passer trop de temps à touiller son café, ou de l'avaler rapidement de peur que le morceau de sucre se reforme. Plus sérieusement : rien n'empêche la chaîne de se trouver dans un état rare (au sens probabiliste, c'est-à-dire, de faible probabilité stationnaire), seulement elle ne s'y trouve que rarement (au sens temporel), extrêmement rarement, pour nous autre mortels, jamais !

Boltzmann était conscient du fait que les temps de récurrence dans le théorème de Poincaré devaient être très longs, mais ses arguments n'avaient pas réussi à convaincre, ce que put faire le modèle Ehrenfest.

Théorème ergodique

Nous allons donner des conditions générales garantissant que les moyennes empiriques du type

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(X_k, \ldots, X_{k+L})$$

convergent vers les moyennes probabilistes.

On obtiendra le résultat recherché comme conséquence de la proposition suivante.

[1] Dans ce modèle, ce n'est pas vrai à cause de la périodicité de la chaîne, mais cette objection disparait au prix d'une légère modification.

Proposition 8.3.1 *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *une* CMH *irréductible* récurrente*, et soit* x *la mesure invariante canonique associée à l'état* $0 \in E$*,*

$$x_i = E_0 \left[\sum_{n\geq 1} 1_{\{X_n=i\}} 1_{\{n\leq T_0\}} \right], \tag{8.33}$$

où T_0 *est le temps de retour en* 0*. Définissons pour tout* $n \geq 1$

$$\nu(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k=0\}}. \tag{8.34}$$

Soit maintenant $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\sum_{i\in E} |f(i)| x_i < \infty. \tag{8.35}$$

Alors, pour toute distribution initiale μ*, presque sûrement,*

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{\nu(N)} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i) x_i. \tag{8.36}$$

Démonstration. Soit $T_0 = \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ les temps de retour successifs en 0. Posons

$$U_p = \sum_{n=\tau_p+1}^{\tau_{p+1}} f(X_n).$$

La suite $\{U_p\}_{p\geq 1}$ est, d'après le Théorème 8.2.1, IID. De plus, si on suppose $f \geq 0$,

$$\begin{aligned}
E[U_1] &= E_0 \left[\sum_{n=1}^{T_0} f(X_n) \right] \\
&= E_0 \left[\sum_{n=1}^{T_0} \sum_{i\in E} f(i) 1_{\{X_n=i\}} \right] = \sum_{i\in E} f(i) E_0 \left[\sum_{n=1}^{T_0} 1_{\{X_n=i\}} \right] \\
&= \sum_{i\in E} f(i) x_i.
\end{aligned}$$

Cette quantité est finie par hypothèse et, d'après la loi forte des grands nombres,

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} U_p = \sum_{i\in E} f(i) x_i,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=T_0+1}^{\tau_{n+1}} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i) x_i. \tag{8.37}$$

En observant que

$$\tau_{\nu(n)} \leq n < \tau_{\nu(n)+1},$$

on a :

$$\frac{\sum_{k=1}^{\tau_{\nu(n)}} f(X_k)}{\nu(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}{\nu(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{\tau_{\nu(n)+1}} f(X_i)}{\nu(n)}.$$

Comme la chaîne est récurente, $\lim_{n\uparrow\infty} \nu(n) = \infty$, et donc, d'après (8.37), les termes extrêmes de la chaîne d'inégalités ci-dessus tendent vers $\sum_{i\in E} f(i)x_i$ quand n tend vers l'∞, et ceci donne (8.36). Le cas où f est de signe arbitraire s'obtient en écrivant (8.36) pour $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = \max(0, -f)$, et en prenant les différences des égalités obtenues de cette manière (la différence n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$, grâce à l'hypothèse (8.35)). □

Nous sommes maintenant en mesure de donner le *théorème ergodique* pour les chaînes de Markov.

Théorème 8.3.3 *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une* CMH *irréductible récurrente positive de distribution stationnaire π, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$E_\pi [|f(X_0)|] := \sum_{i\in E} |f(i)|\pi(i) < \infty. \tag{8.38}$$

Alors, pour toute distribution initiale μ, presque sûrement,

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i)\pi(i). \tag{8.39}$$

Démonstration. On applique la Proposition 8.3.1 à $f \equiv 1$. La condition (8.35) est satisfaite, puisque dans le cas positif récurrent, $\sum_{i\in E} x_i = E_0[T_0] < \infty$. Donc, presque sûrement,

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{N}{\nu(N)} = \sum_{j\in E} x_j.$$

Si la fonction f satisfait (8.38), elle satisfait aussi (8.35), puisque x et π sont proportionnelles, et donc, presque sûrement,

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{\nu(N)} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \sum_{i\in E} f(i)x_i.$$

En combinant les égalités ci-dessus, on obtient

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \lim_{N\to\infty} \frac{\nu(N)}{N} \frac{1}{\nu(N)} \sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \frac{\sum_{i\in E} f(i)x_i}{\sum_{j\in E} x_j},$$

d'où (8.39), puisque π est obtenue par normalisation de x. □

Le corollaire suivant étend le domaine d'application du Théorème 8.3.3.

Corollaire 8.3.1 *Soit* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *une* CMH *irréductible récurrente positive de distribution stationnaire* π*, et soit* $g : E^{L+1} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$E_\pi[|g(X_0, \dots, X_L)|] < \infty\,.$$

Alors, pour toute distribution initiale μ*, presque sûrement,*

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} g(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+L}) = E_\pi[|g(X_0, \dots, X_L)|]\,.$$

Démonstration. On applique le Théorème 8.3.3 à la chaîne $\{(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+L})\}_{n\geq 0}$ d'espace d'état

$$F = \{(i_0, i_1, \dots, i_L) \in E^{L+1};\, p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$$

qui est (voir Exercice 8.5.19) irréductible récurrente positive de distribution stationnaire

$$\pi(i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{L-1} i_L}\,.$$

□

Exemple 8.3.2: Estimateur empirique des probabilités de transition. Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une CMH irréductible récurrente positive de matrice de transition $\mathbf{P}$ et de distribution stationnaire π. Alors, pour tous $i_0,\ i_1 \in E$,

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n = i_0\}} = \pi(i_0)$$

et

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n = i_0, X_{n+1} = i_1\}} = \pi(i_0) p_{i_0, i_1}\,.$$

En particulier,

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n = i_0, X_{n+1} = i_1\}}}{\sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n = i_0\}}} = p_{i_0, i_1}\,.$$

Démonstration. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(i) = 1_{\{i_0\}}(i)$. On a :

$$\begin{aligned} f(X_n) &= 1_{\{i_0\}}(X_n) \\ &= 1_{\{X_n = i_0\}}, \end{aligned}$$

et donc, d'après le théorème ergodique(Théorème 8.3.3),

$$\begin{aligned} \lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n = i_0\}} &= E_\pi\left[1_{\{X_0 = i_0\}}\right] \\ &= P_\pi(X_0 = i_0) = \pi(i_0). \end{aligned}$$

Avec $f : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $f(i,j) = 1_{\{i_0,i_1\}}(i,j)$, on a :

$$\begin{aligned} f(X_n, X_{n+1}) &= 1_{\{i_0,i_1\}}(X_n, X_{n+1}) \\ &= 1_{\{X_n=i_0, X_{n+1}=i_1\}}. \end{aligned}$$

et donc, toujours d'après le théorème ergodique (Corollaire 8.3.1) :

$$\begin{aligned} \lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_n=i_0, X_{n+1}=i_1\}} &= E_\pi \left[1_{\{X_0=i_0, X_1=i_1\}}\right] \\ &= P_\pi(X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \pi(i_0) p_{i_0,i_1}. \end{aligned}$$

□

On voit donc que si l'on ne connaît pas la matrice de transition d'une CMH irréductible récurrente positive, on peut, en principe, obtenir cette matrice de transition si on dispose d'une trajectoire complète de la CMH en question.

EXEMPLE 8.3.3: UNE POLITIQUE DE MAINTENANCE. Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables IID à valeurs dans $\mathbb{N}_+$. La variable U_n est interprétée comme la durée de vie d'une machine, la n-ème, qui est remplacée par une $(n+1)$-ème dès qu'elle tombe en panne. Donc, au temps 0, la machine 1 est mise en service service jusqu'à ce qu'elle “casse” au temps U_1, où elle est immédiatement remplacée par la machine 2, qui casse au temps $U_1 + U_2$, et ainsi de suite. Au temps n, le temps restant avant la prochaine panne est X_n. Plus précisément, le processus $\{X_n\}_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $E = \mathbb{N}$ (On suppose que ces variables prennent des valeurs arbitrairement grandes : $P(U_1 > k) > 0$ pour tout $k \geq 1$; l'autre cas se traîte de manière analogue), est égal à 0 au temps $R_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$, à $U_{k+1} - 1$ au temps $R_k + 1$, et alors décroît d'une unité par unité de temps jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur 0 au temps R_{k+1}. On supposera que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $P(U_1 > k) > 0$, de sorte que l'espace d'état E est $\mathbb{N}$. Alors $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH de probabilités de transition :

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= P(U > i+1 \,|\, U > i) = \frac{P(U > i+1)}{P(U > i)}, \\ p_{i,0} &= P(U = i+1 \,|\, U > i) = \frac{P(U = i+1)}{P(U > i)}, \end{aligned}$$

où U est une variable aléatoire de même distribution que U_1. Cette CMH est irréductible, comme on le vérifie facilement. Elle est récurrente positive si et seulement si $E[U] < \infty$ $(U_1 = T_0)$. Dans ce cas, sa distribution stationnaire est

$$\pi(i) = \frac{P(U > i)}{E[U]}. \tag{8.40}$$

En effet, on vérifie facilement les équations de balance globale

$$\pi(i) = p_{i-1,i}\pi(i-1)$$

et

$$\pi(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)p_{i,0}.$$

Une visite de la CMH à l'état 0 correspond à une panne de la machine machine, et donc d'après le théorème ergodique,,

$$\pi(0) = \lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_k=0\}}$$

est la fréquence empirique des pannes. On a

$$\pi(0) = E_0[T_0]^{-1},$$

où T_0 est le temps de retour en 0. Ici,

$$E_0[T_0] = E[U],$$

et donc

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_k=0\}} = \frac{1}{E[U]}. \tag{8.41}$$

Le coût d'une panne peut être si important que l'on préfère remplacer une machine avant qu'elle tombe en panne (une panne entraîne des réparations coûteuses, peut-être même une catastrophe humaine, tandis qu'un remplacement se traduit par de simples coûts de maintenance). Dans la politique de *de retraite à âge fixe*, on choisit un entier $T \geq 1$ et on impose que toute machine atteignant l'âge T soit immédiatement remplacée. On veut calculer la fréquence empirique des pannes (pas des remplacements).

La CMH correspondant à cette politique est du même type que celle décrite plus haut, on remplace simplement U_n par $V_n = U_n \wedge T$. Un remplacement (pas une panne) a lieu au temps n si et seulement si $X_n = 0$ et $X_{n-1} = T-1$. Mais $X_{n-1} = T-1$ implique $X_n = 0$, et donc un remplacement a lieu au temps n si et seulement si

$$X_{n-1} = T-1.$$

La fréquence empirique de remplacements non dus à des pannes est donc, d'après le théorème ergodique,

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1_{\{X_k=T-1\}} = \pi(T-1).$$

La formule (1) appliquée à cette nouvelle situation donne

$$\pi(T-1) = \frac{P(V \geq T)}{E[V]},$$

et donc, comme $V = U \wedge T$,

$$\pi(T-1) = \frac{P(U \geq T)}{E[U \wedge T]}.$$

La fréquence empirique des visites à 0 est, d'après (8.41),

$$\frac{1}{E[U \wedge T]}.$$

La fréquence empirique des pannes est donc

$$\frac{1}{E[U \wedge T]} - \frac{P(U \geq T)}{E[U \wedge T]} = \frac{P(U < T)}{E[U \wedge T]}.$$

8.4 Méthode de Monte Carlo

Principe de la méthode de Monte Carlo

On a vu (Section 3.2) que pour échantillonner une distribution de probabilié π sur un espace fini $E = \{1, 2, ..., r\}$, on dispose d'une méthode conceptuellement très simple : On tire un nombre aléatoire U uniformément distribué sur $[0, 1]$ et on définit la variable aléatoire Z en posant $Z = i$ si $\sum_{\ell=1}^{i-1} \pi(\ell) \leq U < \sum_{\ell=1}^{i} \pi(\ell)$. La variable aléatoire Z est alors bien un échantillon de π (c'est-à-dire : elle admet π comme distribution).

Cette méthode, dite de l'inverse, a un certain nombre d'inconvénients quand r est très grand :

(a) Des problèmes peuvent se poser à cause de la petitesse des intervalles qui forment la partition de $[0, 1]$ adaptée à la distribution π, et du coût de la précision alors nécessaire dans les calculs.

(b) L'espace des états ne se présente pas d'une manière naturelle sous la forme $\{1, 2, ..., r\}$. En traitement des images et en physique statistique, un état est, par exemple, un tableau de symboles binaires $\{a_{ij}, 1 \leq i, j \leq M; \quad a_{ij} \in \{0, 1\}$, avec M très grand. Pour implémenter la méthode de l'inverse, il faut d'abord "coder" E, c'est-à-dire associer à chacun de ses éléments un nombre de 1 à r, obtenir Z qui est un nombre de 1 à r, puis "décoder" le résultat (dire quelle image correspond à ce nombre). Ces opérations, qui nécessitent des recherches dans de très grandes listes, sont coûteuses en temps de calcul.

(c) Enfin, il existe de nombreuses situations, surtout en physique, où π n'est connu qu'à un facteur de normalisation près. La méthode de l'inverse est alors tout simplement inapplicable.

La recherche d'échantillonneurs qui surmontent ces difficultés (surtout la dernière) est un sujet important. La méthode dite MCMC ("Monte Carlo Markov chain") est basé sur le principe suivant : on construit une CMH $\{X_n\}_{n\geq 0}$ irréductible récurrente positive apériodique dont l'espace des états est $E = \{1, 2, ..., r\}$ et qui admet π comme distribution stationnaire. On laisse ce processus évoluer jusquà un temps n assez grand pour que la distribution de X_n soit assez proche de la distribution stationnaire π, et on prend comme échantillon de π la variable X_n. La distribution de X_n n'est qu'approximativement égale à π. Ceci n'est pas trop grave si on peut donner une vitesse de convergence de la distribution au temps n vers la distribution stationnaire ce qui permet de contrôler la qualité de l'approximation en choisissant n en fonction des exigences de précision. Le problème des vitesses de convergence est un domaine de recherche très actif que nous n'aborderons pas ici. Pour l'instant nous allons simplement choisir une matrice de transition irréductible récurrente positive apériodique qui admet π comme distribution stationnaire.

Il y a un nombre infini de telles matrices et, parmi elles, il y en a une infinité qui correspondent à une paire $(\mathbf{P}, \pi)$ réversible, c'est-à-dire telle que

$$\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}. \tag{8.42}$$

Nous allons chercher des solutions de la forme

$$p_{ij} = q_{ij}\alpha_{ij} \tag{8.43}$$

pour $j \neq i$, où $Q = \{q_{ij}\}_{i,j\in E}$ est une matrice de transition sur E irréductible. La chaîne évolue de la façon suivante : Lorsque l'état présent est i, on choisit un état j avec la probabilité q_{ij}. Cet état j est accepté comme nouvel état avec la probabilité α_{ij}. S'il n'est pas accepté, on ne change pas d'état, on reste en i. La probabilité de transition de i à j quand $i \neq j$ est bien donné par (8.42). Il reste maintenant à choisir q_{ij} et α_{ij}. Nous allons décrire les deux algorithmes les plus célèbres.

Exemple 8.4.1: L'algorithme de Metropolis. On suppose que la distribution π est de la forme

$$\pi(i) = \frac{e^{-U(i)}}{K}, \tag{8.44}$$

où $U : E \to \mathbb{R}$ est une fonction, dite “fonction énergie” dans un contexte de physique, et K est la “constante de partition”, la constante de normalisation assurant que π est bien un vecteur de probabilité. On notera que la forme (8.44) n'a pas vraiment à être postulée puisque on peut toujours choisir $U(i) = -\log \pi(i)$ et $K = 1$. En pratique, la fonction d'énergie U est donnée et la constante de normalisation K est impossible à calculer numériquement. Mais nous allons voir que l'algorithme de Metropolis n'en a pas besoin. Cet algorithme préconise une matrice Q symétrique, et la probabilité d'acceptation

$$\alpha_{ij} = \min\left(1, e^{-(U(j)-U(i))}\right).$$

Il est facile de vérifier que les équations de balance détaillée (8.42) sont satisfaites, et que la CMH en question est bien irréductible et, lorsque la fonction énergie n'est pas une constante, apériodique.

Exemple 8.4.2: L'algorithme de Barker. Cet algorithme utilise lui aussi une matrice Q symétrique. Sa probabilité d'acceptation est

$$\alpha_{ij} = \frac{e^{-U(i)}}{e^{-U(i)} + e^{-U(j)}}.$$

Ce choix correspond au principe de base de la physique statistique : quand la Nature a le choix entre deux états 1 et 2 d'énergies respectives E_1 et E_2, elle choisit $i = 1, 2$ avec la probabilité $\frac{e^{-E_i}}{e^{-E_1}+e^{-E_2}}$. Là encore, on vérifie que les équations de balance détaillée (8.42) sont satisfaites, et que la cmh en question est bien irréductible et, lorsque la fonction énergie n'est pas une constante, apériodique.

Exemple 8.4.3: L'algorithme de Gibbs. L'espace des états est $E = \Lambda^N$, où N est un entier positif et Λ est un ensemble fini. La distribution à échantillonner est donc de la forme

$$\pi(z) = \pi(z(1), \dots, z(N))$$

Le mécanisme de transition est le suivant. Si on se trouve dans l'état $(z(1), \dots, z(N))$, on choisit un "site" ℓ, $1 \le \ell \le N$, au hasard, et on change la coordonnée $z(\ell)$ (et elle seule) en $y(\ell)$, cette nouvelle coordonnée étant choisie en fonction de $z(1), \dots, z(\ell-1), z(\ell+1), \dots, z(N)$ avec la probabilité

$$\pi(y(\ell) \mid z(1), \dots, z(\ell-1), z(\ell+1), \dots, z(N)). \tag{8.45}$$

Là encore, on vérifie que les équations de balance détaillée (8.42) sont satisfaites, que la cmh en question est bien irréductible et, lorsque π n'est pas une constante, apériodique.

Cette méthode est spécialement intéressante lorsque Λ (l'"espace des phases") est petit, et lorsque la probabilité conditionnelle $\pi(\cdot \mid z(1), \dots, z(\ell-1), z(\ell+1), \dots, z(N))$ ne dépend que d'un petit nombre des arguments $z(1), \dots, z(\ell-1), z(\ell+1), \dots, z(N)$. Voici un exemple qui présente un grand intérêt pour les physiciens :

Exemple 8.4.4: L'échantillonneur de Gibbs pour le modèle d'Ising. Le modèle d'Ising est une idéalisation d'un matériau ferromagnétique. On a $N = M^2$ dipôles magnétiques placés sur une grille finie. Plus précisément les sites sur lesquels se trouvent les dipôles forment un ensemble $S = \{(i,j); 1 \le i, j \le M\}$. Un site $s \in S$ a donc la forme $s = (i,j)$. La distance entre deux sites $s_1 = (i_1, j_1)$ et $s_2 = (i_2, j_2)$ est $d(s_1, s_2) = |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2|$. On dit que s_1 et s_2 sont voisins si $d(s_1, s_2) = 1$. Deux sites voisins s_1 et s_2 forment une paire notée $\langle s_1, s_2 \rangle$. L'espace des phases est $\Lambda = \{-1, +1\}$, la valeur -1 correspond à une orientation de dipôle, disons vers le bas, tandis que $+1$ correspond à la direction opposée. L'espace d'états $E = \Lambda^S$ est l'ensemble des "configurations" $(z(s), s \in S)$ où $z(s) \in \Lambda = \{-1, +1\}$. Une telle configuration représente des dipôles placés sur les sites de S, l'orientation du dipôle placé en s étant $z(s)$. Si on énumère les sites de S de 1 à $N = M^2$, on retrouve bien la situation décrite plus haut. Précisons maintenant la distribution π. On prendra

$$\pi(z(s), s \in S) = \frac{\exp\{-\mathcal{E}(z)\}}{K}$$

où $\mathcal{E}(z)$ est l'énergie de la configuration $z = (z(s), s \in S)$: $\mathcal{E}(z) = H \sum_{s \in S} z(s) + J \sum_{\langle s,t \rangle} z(s)z(t)$ (la deuxième somme porte sur toutes les paires de sites voisins) et K est une constante de normalisation, en général incalculable numériquement. (Pour les physiciens H est le champ magnétique externe, et J est l'énergie interne d'une paire de dipôles voisins orientés dans le même sens.) La probabilité conditionnelle jouant le rôle de (8.45),

$$\pi(y(s) \,|\, z(t), t \in S - \{s\}) = \frac{\pi(y(s), z(t), t \in S - \{s\})}{\sum_{z(s) \in \Lambda} \pi(z(s), z(t), t \in S - \{s\})},$$

prend la forme (faire le calcul)

$$\pi(y(s) \,|\, z(t), t \in S - \{s\}) = \frac{\exp\{\mathcal{E}(s,z)\}}{\exp\{\mathcal{E}_{+1}(s,z)\} + \exp\{\mathcal{E}_{+1}(s,z)\}}, \tag{8.46}$$

où $\mathcal{E}(s,z) = y(s)\,(H + J \sum z(v(s)))$ et où la somme porte sur tous les sites $v(s)$ voisins de s. En physique, on appelle $\mathcal{E}(s,z)$ l'énergie locale au site s de la configuration $(y(s), z(t), t \in S - \{s\})$, et $\mathcal{E}_{+1}(s,z)$ et $\mathcal{E}_{+1}(s,z)$ sont les valeurs de cette énergie locale correspondant aux directions $+1$ et -1 respectivement de l'orientation du dipôle placé en s. L'échantillonneur de Gibbs fonctionne donc dans le cas présent de la façon suivante : si au temps n on a la configuration $z = (z(s), s \in S)$, on choisit un site complètement au hasard (distribution uniforme). Si c'est le site s qui a été tiré au sort, on tire au sort la nouvelle phase $y(s)$ de ce site s selon la probabilité (8.46). On notera que ce choix est fait selon les principes de la physique statistique décrit quelques lignes plus haut.

8.5 Exercices

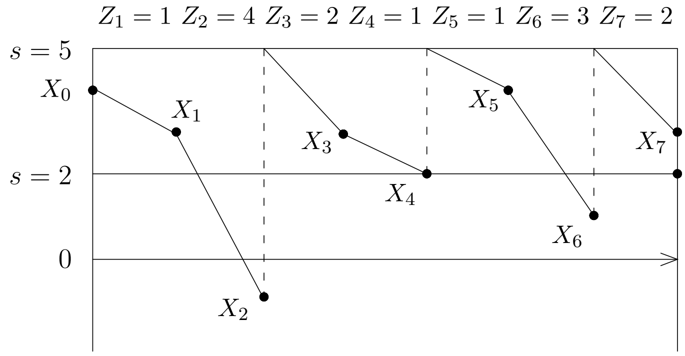
Exercice 8.5.1. Un contre-exemple.
La propriété de Markov ne dit pas que le présent et le futur sont indépendants étant donné une information *quelconque* sur le présent. Trouvez un exemple simple de CMH $\{X_n\}_{n \geq 0}$ avec l'espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que

$$P(X_2 = 6 \mid X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) \neq P(X_2 = 6 \mid X_1 \in \{3,4\}).$$

Exercice 8.5.2.
Démontrez l'égalité (8.2).

Exercice 8.5.3.
Démontrez le Théorème 8.1.5.

Exercice 8.5.4. Gestion des stocks.
Une marchandise donnée A est stockée en vue de satisfaire à la demande. La demande totale entre le temps n et le temps $n+1$ est de Z_{n+1} unités, et on suppose que la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est IID, et indépendante de la valeur initiale X_0 du stock. Le remplissage du stock a lieu aux temps $n+0$ (c'est-à-dire, immédiatement après le temps n) pour tout $n \geq 1$.



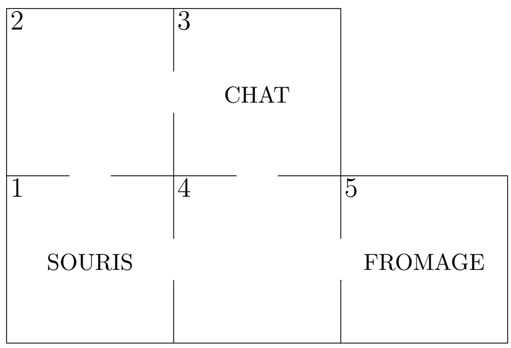
Une stratégie de gestion populaire est la stratégie (s, S), où s et S sont des entiers tels que $0 < s < S$. Avec cette politique de gestion, si le niveau du stock au temps n est plus gret que s, alors le stock est ramené au niveau S autemps $n+0$. Autrement, rien n'est fait. Le stock initial X_0 est supposé inférieur ou égal à S, et donc $\{X_n\}_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans $E = \{S, S-1, S-2, \ldots\}$. (Voir la figure.) Les valeurs négatives du stock sont admises, avec interprétation qu'une commande non satisfaite est immédiatement honorée après restockage. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une CMH et donnez sa matrice de transition.

Exercice 8.5.5. $*$ Records.
Soit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ une suite IID de variables géometriques (pour $k \geq 0$, $P(Z_n = k) = (1-p)^k p$, où $p \in (0,1)$). Soit $X_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$ la *valeur record* au temps n, où on suppose que X_0 est une variable à valeurs entières et indépendante de la suite $\{Z_n\}_{n\geq 1}$. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH et donnez sa matrice de transition.

Exercice 8.5.6. $*$ La vie des gangsters.
Trois personnages armés, A, B, et C, se trouvent soudainement en présence au carrefour d'une rue de Washington, D.C., et sur ce, se mettent tout naturellement à se tirer dessus. Chaque survivant tire sur un autre survivant de son choix toutes les 10 secondes. Les probabilités d'atteindre la cible pour A, B, et C sont respectivement α, β, et γ. A est le plus haï des trois, et donc, tant qu'il vit, B et C s'ignorent et lui tirent dessus. Pour des raisons historiques que nous ne développerons pas, A ne peut pas sentir B, et donc il ne

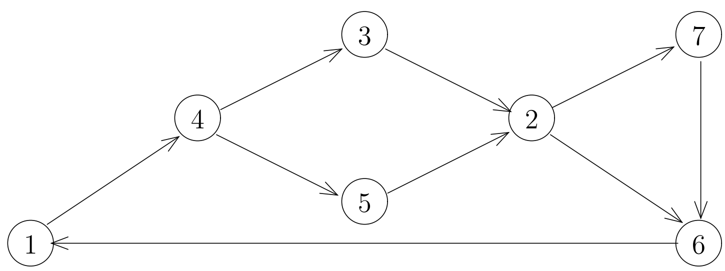
tire que sur B tant que ce dernier est vivant. Le bienheureux C n'est visé que lorsqu'il se trouve en présence de A seul ou B seul. Quelles sont les chances de survie de A, B, et C, respectivement ?

Exercice 8.5.7. $*$ Le chat, la souris et le gruyère.
Une souris affairée se promène dans un labyrinthe. Si au temps n elle se trouve dans une pièce avec k portes, elle en choisit une avec la probabilité $\frac{1}{k}$ et se retrouve à l'instant $n+1$ dans la pièce à laquelle cette porte conduit. Un chat paresseux attend dans la pièce numéro 3, et il y a un morceau de fromage dans la pièce numéro 5. La souris commence son périple dans la pièce 1. Avec quelle probabilité goûtera-t-elle du fromage avant que le chat ne la dévore ?



La chambre au gruyère

Exercice 8.5.8.
Montrez que le graphe de transition de la figure ci-dessous est irréductible. Donnez sa période et ses classes cycliques.



Exercice 8.5.9.
Montrez qu'une matrice de transition $\mathbf{P}$ avec au moins un état $i \in E$ tel que $p_{ii} > 0$ est apériodique.

Exercice 8.5.10. $*$
Montrez que la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ n'a pas de distribution stationnaire.

Exercice 8.5.11.
Est-ce que la CMH de l'Exemple 8.1.9 est réversible ?

Exercice 8.5.12.
Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ la CMH de l'Exemple 8.1.7.

(1) Montrez qu'elle est réversible ;

(2) Sachant $X_0 = 1$, calculez la distribution de probabilité de $T_1 = \inf\{n \geq 1;\ X_n = 1\}$, où on utilise la convention $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

Exercice 8.5.13. $*$
Calculez la distribution stationnaire de la CMH d'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta & \\ \gamma & 0 & 1-\gamma & \end{pmatrix},$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$. Est-elle réversible ?

Exercice 8.5.14. $*$
Démontrez le Théorème 8.2.1

Exercice 8.5.15. Les cailloux.
Des cailloux $S_1, \dots, S_M$ sont alignés. Au temps n un caillou est choisi au hasard, et ce caillou échange sa place avec le caillou placé juste devant lui. Si le caillou sélectionné est en tête, on ne change rien. Par exemple, avec $M = 5$: Si la situation juste avant le temps n est $S_2S_3S_1S_5S_4$ (S_2 est en tête), et si S_5 est tiré au sort, la nouvelle situation est $S_2S_3S_5S_1S_4$, tandis que si S_2 est sélectionné, la configuration reste la même. À chaque top de l'horloge, S_i est sélectionné avec la probabilité $\alpha_i > 0$. Notons X_n la situation au temps n, par exemple $X_n = S_{i_1} \cdots S_{i_M}$, avec l'interprétation que S_{i_j} est dans la j-ème position. Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une CMH irréductible récurrente positive et que sa distribution stationnaire est

$$\pi(S_{i_1} \cdots S_{i_M}) = C\alpha_{i_1}^M \alpha_{i_2}^{M-1} \cdots \alpha_{i_M},$$

où C est une constante de normalisation.

Exercice 8.5.16. Chaîne produit.
Soit $\{X_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ et $\{X_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ deux CMH avec la même matrice de transition $\mathbf{P}$. Montrez que le processus $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E \times E$ défini par $Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ est une CMH. Quelle est sa matrice de transition en n étapes ? Montrez qu'elle est irréductible si $\mathbf{P}$ est

irréductible et apériodique. Donnez un contre-exemple lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'apériodicité.

Exercice 8.5.17.
Soit $X_0^1, X_0^2, Z_n^1, Z_n^2$ $(n \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes, et telles que, de plus, Z_n^1, Z_n^2 $(n \geq 1)$ sont identiquement distribuées. Soit τ une variable aléatoire à valeurs entières non négatives telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'événement $\{\tau = m\}$ est exprimable en fonction de $X_0^1, X_0^2, Z_n^1, Z_n^2$ $(n \leq m)$. On définit $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ par

$$Z_n = \begin{cases} = Z_n^1 & \text{si } n \leq \tau \\ = Z_n^2 & \text{si } n > \tau \end{cases}$$

Montrez que $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ a la même distribution que $\{Z_n^1\}_{n\geq 1}$ et est indépendante de X_0^1, X_0^2.

Exercice 8.5.18. Fusion.
Soit $\{X_n^1\}_{n\geq 0}$ et $\{X_n^2\}_{n\geq 0}$ deux CMH avec la même matrice de transition $\mathbf{P}$. Soit τ le temps défini par

$$\tau = \inf\{n \geq 0\,;\, X_n^1 = X_n^2\}$$

(avec la convention usuelle: $\inf \varnothing = \infty$). Supposons que $P(\tau < \infty) = 1$. On définit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ par

$$X_n = \begin{cases} X_n^1 & \text{if } n \leq \tau \\ X_n^2 & \text{if } n > \tau \end{cases}$$

Montrez que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ a la même distribution que $\{X_n^1\}_{n\geq 1}$.

Exercice 8.5.19. La chaîne serpent.
Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une CMH d'espace d'état E et de matrice de transition $\mathbf{P}$. Pour $L \geq 1$, on définit $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+L})$.

(a) Le processus $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $F = E^{L+1}$. Montrez que c'est une CMH et donnez sa matrice de transition.

(b) Montrez que si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ si on restreint l'espace d'état de cette dernière à $F = \{(i_0, \ldots, i_L) \in E^{L+1}\,;\; p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{L-1} i_L} > 0\}$.

(c) Montrez que si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ a une distribution stationnaire π, alors $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ a aussi une distribution stationnaire. Laquelle ?

Exercice 8.5.20. $*$ Retour à l'état initial.
Soit τ le temps de retour à l'état initial d'une CMH irréductible récurrente positive $\{X_n\}_{n\geq 0}$, c'est-à-dire,

$$\tau = \inf\{n \geq 1; X_n = X_0\},$$

Calculez l'espérance de τ lorsque la distribution initiale est la distribution stationnaire π. Conclure que cette espérance est finie si et seulement si E est fini. Quand E est infini, est-ce que ceci est en contradiction avec l'hypothèse de récurrence positive ?

Exercice 8.5.21. $*$ Le cavalier rentre à la maison.
Un cavalier circule de manière aléatoire sur un échiquier, choisissant chaque mouvement parmi ceux qui lui sont permis avec la même probabilité, et débutant son périple d'un coin de l'échiquier. Combien de temps en moyenne lui faudra-t-il pour se retrouver sur sa case de départ ?

Exercice 8.5.22. Codage alternatif.
Dans certains systèmes de communication numérique, une suite de 0 et de 1 (symboles d'entrée) est codée en une suite de 0, $+1$ et -1 (symboles de sortie) de la manière suivante. Un symbole d'entrée 0 est codé en 0, tandis qu'un symbole d'entrée 1 est codé en -1 ou $+1$. Le choix entre -1 et $+1$ est fait de telle sorte que les -1 et les $+1$ alternent. Le premier 1 est codé en $+1$. Par exemple la suite de symboles d'entrée 011101 devient $0, +1, -1, +1, 0, -1$.

a. Trouvez un automate avec 4 états $+1$, -1, 0_+ et 0_-, pour lequel la suite des états visités, à part l'état initial fixé à 0_+, est, lorsque 0_+ et 0_- sont remplacés par 0, exactement la suite de sortie.

b. On suppose que la suite d'entrée $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est iid, avec 0 et 1 équiprobables. La suite des états de l'automate est alors une cmh dont on demande de calculer la matrice de transition $\mathbf{P}$ et ses itérées $\mathbf{P}^n$, et la distribution stationnaire π.

c. Notons $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ la suite de symboles de sortie (prenant les valeurs $\{0, -1, +1\}$). Montrez que $Y_n = f(X_n)$ pour une function f à identifier, et calculez $\lim_{n\to\infty}\{E[Y_nY_{n+k}] - E[Y_n]E[Y_{n+k}]\}$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice 8.5.23. $*$ ABBABAA.
Une suite de A et de B est formée comme suit. La première lettre est choisie au hasard, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, ainsi que la deuxième, indépendamment de la première. Quand les $n \geq 2$ premières lettres ont été sélectionnées, la $(n+1)$-ème est choisie, indépendamment des lettres dans les positions $k \leq n-2$, et conditionnellement à la paire formée par les lettres en position $n-1$ et n, comme suit :

$$P(A \mid AA) = \frac{1}{2}, P(A \mid AB) = \frac{1}{2}, P(A \mid BA) = \frac{1}{4}, P(A \mid BB) = \frac{1}{4}.$$

Quelles sont les proportions de A et de B au long terme ?

Exercice 8.5.24. Recherche d'un motif.
Considérons le tableau de a et de b de la figure A ci-dessous où une lettre dans une position donnée est choisie au hasard et équiprobablement dans l'ensemble $\{a, b\}$,

indépendamment des autres lettres. On veut calculer la fréquence empirique asymptotique du motif de la figure B, sans compter les chevauchements. Par exemple, avec la suite de la figure A , on compte 2 occurences du motif ; La troisième est ignorée car elle chevauche la deuxième (Figure C).

$$\begin{array}{cccccccccc} b & a & b & b & a & b & a & b & b & b \\ b & a & a & a & b & b & a & a & a & a \end{array} \qquad \text{A}$$

$$\begin{array}{ccc} b & \cdot & b \\ \cdot & a & a \end{array} \qquad \text{B}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} b & a & b & b & a & b & a & b & b & b \\ b & a & a & a & b & b & a & a & a & a \end{array} \qquad \text{C}$$

OUI OUI NON

Trouvez un automate qui lit successivement les colonnes à deux lettres de gauche à droite, et qui possède un état privilégié $*$ avec la propriété suivante : l'automate entre ou reste dans l'état $*$ si et seulement si il vient de découuvrir un motif qui ne chevauche pas un autre précédemment découvert. Quelle est la fréquence empirique asymptotique du motif ?