Modèles et Algorithmes des Réseaux

TD n°8

10 novembre 2015

Exercice 1 (maximal matching scheduling in data switches)**.** On considère un commutateur de paquets avec n entrées et n sorties. On suppose le temps discret. On suppose également la présence au niveau des ports d'entrée de files d'attentes différenciées en fonction du port de sortie de destination de chaque paquet. A l'instant t, le nombre de paquets en attente au port d'entrée i avec pour destination le port de sortie j est dénoté par $q_{i,j}(t)$, et durant chaque intervalle de temps un paquet supplémentaire arrive pour ce couple de ports entrée/sortie avec probabilité $\lambda_{i,j}$ indépendamment de tout le reste. On sait que la région de capacité maximum d'un tel commutateur de paquet est l'ensemble

$$\mathcal{C} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n^2} : \sum_i \lambda_{i,j} < 1 \text{ pour tout } j \text{ et } \sum_j \lambda_{i,j} < 1 \text{ pour tout } i\Big\}.$$

La politique d'ordonnancement de liens du commutateur de paquets ne prend en compte que les couples (port d'entrée, port de sortie) pour lesquels des paquets sont en attente et consiste à programmer à chaque intervalle de temps un appariement maximal au sein de ces couples (dans le cas où plusieurs appariements maximaux existent, une règle *arbitraire mais systématique* est utilisée pour les discriminer). Montrer qu'une telle politique d'ordonnancement de liens ne garantit la stabilité du système que si les taux d'arrivées des paquets sont dans la région $\frac{1}{2}\mathcal{C}$.

Exercice 2 (max-weight généralisé et adaptive CSMA)**.** On considère un réseau sans fil ad hoc dont on veut utiliser un sous-ensemble de liens $\mathcal{L}$ pour transmettre des données. Les interférences entre les liens de ce réseau sont décrites par un certain graphe d'interférence dont l'ensemble des ensembles stables est $\mathcal{I}$. On suppose le temps discret. On a montré en cours qu'un tel réseau est stable ssi les taux d'arrivées de paquets sont dans la région de capacité $\mathcal{C}$ suivante :

$$\mathcal{C} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} : \exists \{\gamma_M\}_{M\in\mathcal{I}} \text{ tel que } \lambda < \sum_{M\in\mathcal{I}} \gamma_M M \text{ avec } \sum_{M\in\mathcal{I}} \gamma_M = 1 \text{ et } \gamma_M \geq 0 \text{ pour tout } M\Big\}.$$

Si $q_l(t)$ est le nombre de paquets en attente au niveau du lien l à l'instant t, on sait que la politique d'ordonnancement de liens *max-weight*, qui programme à chaque instant t un ensemble de liens $M(t) \in \mathcal{I}$ qui maximise la quantité $\sum_{l\in M(t)} q_l(t)$ stabilise le système pour tous les taux d'arrivée dans $\mathcal{C}$. On va s'intéresser ici à une politique de max-weight généralisé qui programme à chaque instant un ensemble de liens $M(t) \in \mathcal{I}$ qui maximise la quantité $\sum_{l\in M(t)} w_l(q_l(t))$ pour une certaine fonction w_l. Plus précisément, on impose les conditions suivantes sur w_l, pour tout $l \in \mathcal{L}$:

— w_l est continue et croissante,

— $w_l(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} w_l(x) = +\infty$,

— $\forall\delta > 0$, $\exists B_{l,\delta} > 0$ such that $\forall x \geq 0$,

$$(1-\delta)w_l(x+1) - B_{l,\delta} \leq w_l(x) \leq (1+\delta)w((x-1)^+) + B_{l,\delta}.$$

1. Vérifier que la fonction de poids $w_l(x) = \log(1+x)$ est bien valide.
2. En utilisant la fonction de Lyapunov $V(x) = \sum_{l\in\mathcal{L}} \int_0^x w_l(u)du$, montrer que la politique max-weight généralisé a une région de stabilité maximale.

Dans un réseau sans fil ad hoc, il est difficile d'implémenter exactement une telle politique. Pour une valeur de q donnée, on considère donc plutôt une politique aléatoire qui programme un ensemble de liens tiré avec une distribution

$$\pi_M = \frac{1}{Z} e^{\sum_{l \in M} w_l(q)}.$$

3. Montrer que, sous la loi π, $\mathbb{E}[\sum_{l \in M} w_l(q)] \geq \max_M \left\{ \sum_{l \in M} w_l(q) \right\} - |\mathcal{I}|$.

On cherche maintenant un moyen d'implémenter la politique π de manière distribuée. Pour cela, on va mettre à jour à chaque instant l'ensemble de liens programmé, en partant d'un état initial $M(0) \in \mathcal{I}$, en suivant la procédure suivante :

— Au temps t, chaque lien l demande à être mis à jour avec probabilité d.
— On suppose que tous les liens sont capables de détecter s'il y a collision lors de leur demande de mise à jour. En cas d'absence de collision sur la demande du lien l, il intègre l'ensemble de décision $\mathcal{D}_t$.
— Si $l \in \mathcal{D}_t$ et l était inactif dans l'intervalle précédent, et qu'aucun des liens avec lesquels il interfère n'était actif pendant l'intervalle de temps précédant, l devient actif avec probabilité α_l.
— Si $l \in \mathcal{D}_t$ et l était actif, l devient inactif avec probabilité $1 - \alpha_l$.

4. Décrire la chaîne de Markov associée à l'évolution de l'ensemble de liens programmés. Déterminer α_l pour qu'elle ait pour unique distribution stationnaire π.

Exercice 3 (Aloha)**.** Aloha est le premier protocole MAC pour les réseaux sans fils, conçu pour communiquer au sein de l'université de Hawai. On suppose que $n \gg 1$ émetteurs veulent communiquer avec une unique station de base ; chacun d'entre eux reçoit des paquets à transmettre à un taux λ. Dans la version à temps discret du protocole, les n émetteurs tentent chacun indépendamment de transmettre avec une même probabilité p quand ils ont des paquets en réserve. En cas de collision, tous les paquets concernés devront être retransmis ultérieurement.

1. Déterminer la probabilité de transmission qui maximise le débit du système.
2. Sous quelle condition est-ce que le système est stable ? Quelle est la probabilité de collision ?