Modèles et algorithmes des réseaux

Décomposition en valeurs singulières

15 décembre 2015

Dans tout cet exercice, $|\mathbf{v}|$ désigne la norme 2 d'un vecteur.

Soit A une matrice $n \times d$. Dans un premier temps, on considère A comme contenant les coordonnées de n points $\mathbf{a}_i$ dans $\mathbf{R}^d$, et l'on cherche le sous-espace vectoriel V_k de dimension k fixée qui colle le plus au nuage de points, i.e. qui minimise la somme des distances quadratiques

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{a}_i - \pi_{V_k}(\mathbf{a}_i)|^2.$$

1. Montrer que, dans le cas où $k = 1$, la droite qui minimise cette distance est portée par le vecteur unitaire $\mathbf{v}_1$ qui maximise $|A\mathbf{v}_1|$.

Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est appelé premier vecteur singulier à droite de A, et $\sigma_1(A) = |A\mathbf{v}_1|$ la première valeur singulière de A.

De même, on défini le deuxième vecteur singulier à droite de A par

$$\mathbf{v}_2 = \underset{|\mathbf{v}_2|=1, \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1}{\arg\max} |A\mathbf{v}_2|,$$

et ainsi de suite, en notant à chaque fois $\sigma_k(A) = |A\mathbf{v}_k|$ la k-ième valeur singulière. On note de plus r le plus grand entier tel que $\sigma_r(A) > 0$.

2. Montrer que, pour tout $k \leq r$, le sous-espace vectoriel V_k engendré par $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ minimise la distance quadratique aux $\mathbf{a}_i$.

On cherche désormais à expliciter une matrice A_k, de rang $k \leq r$ fixé, qui approxime au mieux A.

Pour cela, on s'intéresse à la décomposition $A = UDV^T$, où U et V sont des matrices orthonormées et D est diagonale à coefficients positifs.

3. Montrer que la norme de Frobenius, définie par $\|A\|_F^2 = \sum A_{i,j}^2$, vérifie $\|A\|_F^2 = \sum \sigma_i(A)^2$.

4. Monter que les vecteurs singuliers à gauche de la matrice A, définis par $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i(A)} A\mathbf{v}_i$, sont orthogonaux.

5. Monter que

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(A)\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T = UDV^T.$$

6. Soit $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T = UDV^T$. Montrer que A_k est la projection de A sur V_k.

7. Montrer que A_k est la matrice de rang au plus k qui approxime le mieux A au sens de la norme de Frobenius, i.e. que pour toute matrice B de rang au plus k, $\|A - A_k\|_F \leq \|A - B\|_F$.

8. Montrer que A_k est la matrice de rang au plus k qui approxime le mieux A au sens de la norme 2 ($\|A\|_2 = \max_{|\mathbf{v}|=1} |A\mathbf{v}|$), i.e. que pour toute matrice B de rang au plus k, $\|A - A_k\|_2 \leq \|A - B\|_2$. Indication : on pourra montrer dans un premier temps que

$$\|A - A_k\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2.$$