Théorie de l'information et du codage

TD n^{o}6 – Fonction taux-distortion des sources sans mémoire

1 fonction taux-distortion

Une source discrète émet une suite de symboles u dans un ensemble fini $\mathcal{U}$ appelé l'alphabet de la source. Si la source est sans mémoire alors elle est caractérisée par sa statistique $p(u)$: la suite de symboles est une suite de v.a. U_i indépendantes et identiquement distribuées de loi p.

On considère ici un encodage dans un alphabet de destination $\mathcal{V}$. Pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $d(u, v) \in [0, d_{\max})$ est l'erreur ou distortion associée. Pour des vecteurs $(u^k, v^k) \in \mathcal{U}^k \times \mathcal{V}^k$, on note $d(u^k, v^k) = \sum_{i=1}^{k} d(u_i, v_i)$.

Etant donné $k > 0$, une source et une fonction d'encodage, la distortion moyenne est alors :

$$\mathbb{E}[d(U^k, V^k)] = \sum_{u^k, v^k} p(u^k) p(v^k | u^k) d(u^k, v^k).$$

On définit alors la fonction

$$R_k(\delta) = \min\{I(U^k; V^k) : \mathbb{E}[d] \leq k\delta\},$$

où la minimisation est faite sur la loi conditionelle $p(v^k|u^k)$. On définit également $\delta_{\min} = \sum_{u \in \mathcal{U}} p(u) \min_v d(u, v)$ et $\delta_{\max} = \min_v \sum_u p(u) d(u, v)$.

La fonction taux-distortion de la source est définit par

$$R(\delta) = \inf_k \frac{1}{k} R_k(\delta).$$

Question 1. *Montrer que $\delta \mapsto R_k(\delta)$ est convexe pour $\delta \geq \delta_{\min}$.*

Question 2. *Pour une source discrète sans mémoire, montrer que $R_k(\delta) = kR_1(\delta)$ pour tout k et $\delta \geq \delta_{\min}$.*

Question 3. *Pour une source discrète sans mémoire, montrer que $R(\delta) = 0$ si et seulement si $\delta \geq \delta_{\max}$.*

Question 4. *Pour une source sans mémoire avec $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{0, 1\}$ et $d(u, v) = \mathbf{1}(u \neq v)$, calculer la fonction taux-distortion $R(\delta)$.*

2 codage de source avec distortion

On suppose maintenant que les k premiers symboles U^k générés par la source sont codés en utilisant n bits X^n et qu'il est possible à partir de ces n bits de les décoder en k symboles V^k de l'alphabet de destination de telle sorte que $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[d(U_i, V_i)] \leq k\delta$.

Question 5. *Montrer que* $\frac{n}{k} \geq R(\delta)$.

On considère un code de source $C = \{v_1^k, \dots, v_M^k\} \in \mathcal{V}^k$. Le taux du code est $R = \frac{1}{k}\log_2 M$. Pour chaque suite u^k de symboles de la source, on définit $f(u^k)$ comme le mot du code C le plus proche de u^k :

$$d(u^k, f(u^k)) \leq d(u^k, v_j^k),\ \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

La distortion moyenne de C est $D(C) = \frac{1}{k}\sum_{u^k \in \mathcal{U}^k} p(u^k) d(u^k, f(u^k))$.

On veut montrer que pour tout $\delta' > \delta \geq \delta_{\min}$ et tout $R' > R(\delta)$, pour k suffisament grand, il existe un codage de source C de longueur k avec M mots de code et tel que

- $M \leq 2^{\lfloor kR' \rfloor}$;
- $D(C) < \delta'$.

On va utiliser un argument de codage aléatoire : on choisit les M mots du code C indépendament selon une loi $p(v^k)$.

Question 6. *Pour tout* δ''*, montrer que*

$$\mathbb{E}[D(C)] \leq \delta'' + d_{\max} \sum_{u^k} p(u^k) \left(\sum_{v^k} p(v^k) \mathbf{1}(d(u^k, v^k) > k\delta'') \right)^M .$$

Supposons maintenant une loi jointe $p(u^k, v^k)$; les mots du code C sont déterminés indépendament selon la loi marginale $p(v^k)$.

Question 7. *On définit* $I(u^k; v^k) = \log_2 \frac{p(v^k|u^k)}{p(v^k)}$*. Pour tout* δ'' *et tout* R''*, montrer que*

$$\mathbb{E}[D(C)] \leq \delta'' + d_{\max}\mathbb{P}\left(d(U^k, V^k) > k\delta'' \text{ ou } I(U^k; V^k) > kR''\right) + d_{\max} e^{-M2^{-kR''}}.$$

(On pourra utiliser l'inégalité $(1 - xy)^M \leq 1 - x + e^{-yM}$ *pour* $0 \leq x, y \leq 1$ *et* $M > 0$*.)*

Question 8. *En choisissant* δ'', R'' *et la loi* $p(v^k|u^k)$ *de manière appropriée, conclure quant à l'existence d'un code* C *avec les propriétés voulues, pour* k *suffisament grand.*