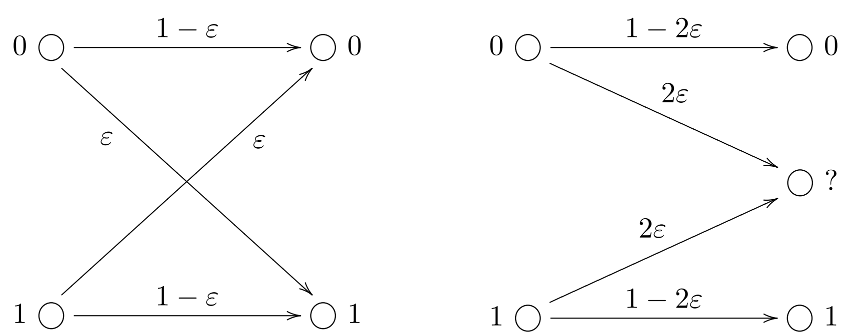
Théorie de l'information et du codage

TD n^{o}5 – Canaux et capacités

Exercice 1 – Canal binaire symétrique et canal à effacement

Calculer puis comparer les capacités des deux canaux suivants :



Quelle est la capacité du canal obtenu en les mettant en série ?

Exercice 2 – Canaux symétriques

Un canal est dit symétrique si sa matrice de transition vérifie :

1. les lignes sont identiques à permutation près ;
2. la somme des éléments est la même dans chaque colonne.

Expliciter la capacité d'un tel canal.

Exercice 3 - Canal $n-$aire symétrique avec coût

On considère le canal n-aire dont la matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} q & p & \dots & p \\ p & q & \dots & p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & p & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Étant donnée une fonction de coût b (positive), déterminer la fonction capacité-coût du canal :

$$C(\beta) = \max \left\{ I(X,Y); \mathbb{E}[b(X)] \leq \beta \right\}.$$

Exercice 4 – Canal de Zorro

Le canal de Zorro est le canal binaire de matrice de transition $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$. Justifier son nom puis calculer sa capacité.

Exercice 5 – Canal gaussien

Le canal gaussien a pour alphabet d'entrée $\mathcal{A}_X = \mathbb{R}$ et pour alphabet de sortie $\mathcal{A}_Y = \mathbb{R}$. Sa réponse $Y_1, Y_2, \cdots$ à une séquence d'entrée $X_1, X_2, \cdots$ est simplement donnée par $Y_i = X_i + Z_i$, où $Z_1, Z_2, \ldots$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le paramètre $\sigma > 0$ représente l'intensité moyenne du bruit dans le canal. Par ailleurs, le coût de transmission $b(x)$ d'un symbole $x \in \mathbb{R}$ à travers ce canal est simplement son énergie x^2.

$$\begin{tikzcd} & Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \arrow[d] & \\ X \arrow[r] & \bigoplus \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

De la même manière que dans le cas discret, on peut définit la fonction capacité-coût :

$$C(\beta) = \max \left\{ I(X,Y) ; X \text{ v.a. réelle à densité telle que } \mathbb{E}[b(X)] \leq \beta \right\},$$

et l'on peut montrer que $C(\beta)$ représente le nombre maximum de bits d'information non-erronée qu'il est possible de transmettre en moyenne à chaque utilisation du canal avec une puissance moyenne de transmission limitée à β. Montrer que :

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\beta}{\sigma^2} \right).$$

Exercice 6 – Source gaussienne

La source gaussienne a pour alphabet-source $\mathcal{A}_U = \mathbb{R}$: les symboles $U_1, U_2, \cdots$ produits sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le paramètre $\sigma > 0$ représente la puissance moyenne d'émission de la source. La mesure de distorsion choisie ici est $d \colon (x,y) \mapsto (x-y)^2$. On peut alors définir la fonction taux-distorsion de cette source :

$$R(\delta) = \min \left\{ I(U,V) ; V \text{ v.a. réelle à densité telle que } \mathbb{E}[d(U,V)] \leq \delta \right\}.$$

Comme dans le cas discret, on peut montrer que $R(\delta)$ représente le nombre minimal de bits nécessaires en moyenne pour décrire chaque symbole émis par la source avec une erreur moyenne d'au plus δ. Montrer que :

$$R(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{\delta} & \text{si } \delta \leq \sigma^2, \\ 0 & \text{si } \delta \geq \sigma^2. \end{cases}$$