

TD du cours de Théorie de l'Information et Codage

6 mars 2012.

1 Exercice 1

Vous avez 8 bouteilles de vin dont une exactement est empoisonnée avec les probabilités suivantes: $p_1 = p_2 = 1/45, p_3 = p_4 = 6/45, p_5 = 7/45, p_6 = p_7 = p_8 = 8/45$. Vous voulez déterminer quelle bouteille est empoisonnée en les testant sur des rats. Un rat qui boit du poison meurt instantanément et un rat qui boit du vin n'est plus fiable pour une nouvelle dégustation! Vous devez donc utiliser chaque rat au plus une fois. Déterminer quelle bouteille est empoisonnée en minimisant le nombre moyen de rats utilisés.

2 Exercice 2: Simulation parfaite à l'aide d'une pièce de monnaie

A l'aide d'une simple pièce de monnaie, on cherche à simuler de manière parfaite une variable aléatoire X de loi $P = (P_1, \dots, P_N)$ donnée sur un ensemble N -aire $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$, de la manière la plus économe possible en termes du nombre moyen de lancers $E[T]$.

1. Montrer que toute stratégie peut être représentée par un arbre binaire dont les feuilles sont étiquetées par des symboles de \mathcal{X} . Quelle condition doit être vérifiée pour que le nombre de lancements soit presque-sûrement fini et que la loi simulée soit bien P ?
2. Etant donnée une stratégie, exprimer le nombre moyen de lancers comme l'entropie binaire d'une variable aléatoire que l'on explicitera, et en déduire que nécessairement $E[T] \geq H(X)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que cette borne puisse être atteinte.
4. Dans le cas général, proposer une stratégie qui garantisse au moins :

$$H(X) \leq E[T] < H(X) + 2.$$

5. En déduire une interprétation asymptotique de l'entropie pour la simulation de séquences iid.

3 Exercice 3: au Casino

On considère le jeu suivant: à l'étape n , le joueur dispose d'un montant S_n . Le casino tire à pile ou face avec probabilité $1/2$. Si le résultat est pile, le casino double la mise du joueur: $S_{n+1} = 2S_n$, sinon le joueur perd les $2/3$ de sa mise: $S_{n+1} = S_n/3$. Le jeu commence avec $S_1 = 1$.

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{1/n}$.
2. Est-il vrai que $\mathbb{E}[\lim_n S_n] = \lim_n \mathbb{E}[S_n]$?

4 Exercice 4: Codage de Shannon-Fano-Ellias

On considère une source générant des lettres de l'alphabet $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, m\}$ selon une loi de probabilité p . On note $F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$ et $\bar{F}(x) = \sum_{y < x} p(y) + \frac{1}{2}p(x)$. On considère le code qui à x associe le mot code correspondant aux $\ell(x)$ premiers bits de $\bar{F}(x)$. Comment choisir $\ell(x)$ pour avoir un code uniquement décodable et ayant une longueur moyenne la plus petite possible? Donner une borne supérieure sur la longueur moyenne du code?

5 Exercice 5: Codage de Shannon et optimalité

On considère une source générant des lettres de l'alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_k\}$ selon une loi de probabilité p . On suppose les lettres de X ordonnées de telle manière que $p(x_i) \geq p(x_j)$ si $i < j$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on définit $F(x_i) = \sum_{j < i} p(x_j)$. On souhaite utiliser le code ϕ suivant : le mot $\phi(x_i)$ codant x_i est donné par les $\lceil -\log p(x_i) \rceil$ premiers bits du développement de $F(x_i)$.

1. Montrer que le code de Shannon est instantané et que sa longueur moyenne L vérifie

$$H(X) \leq L \leq H(X) + 1.$$

2. Le code de Shannon est-il optimal?
3. Soit $\ell(x) = \lceil -\log p(x_i) \rceil$ les longueurs des mots code associés au code de Shannon et soit $\ell'(x)$ les longueurs associées à un code uniquement décodable. Montrer que

$$P(\ell(X) \geq \ell'(X) + c) \leq 2^{-c+1}.$$

4. Montrer que si pour tout $x \in \mathcal{X}$, $p(x)$ est un rationnel dyadique alors

$$P(\ell(X) < \ell'(X)) \geq P(\ell(X) > \ell'(X))$$

5. Dans le cas général, montrer que

$$E(\text{sgn}(\ell(X) - \ell'(X) - 1)) \leq 0.$$