Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage
cours 5 du 15 mars 2011.

1. Exercice mathématique: Montrer que la fonction $\beta \to C(\beta)$ est continue en $\beta_{\min}$.

2. Un canal sans mémoire est dit symétrique si la matrice stochastique Q est telle que: toute ligne de Q est une permutation des autres lignes et chaque colonne est aussi une permutation des autres colonnes. Voici un exemple:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que pour un canal discret sans mémoire symétrique ayant un alphabet d'entrée de taille r et de sortie s, sa capacité est obtenue avec des entrées équiprobables et vaut:

$$C_{\max} = \log s - H(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}),$$

   où $(q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ est une ligne de la matrice de transition.

3. On considère le système de communication vu en cours mais pour un canal quelconque: une source d'information émet une suite $U = (U_1, \ldots, U_k)$. On suppose de plus que la suite des U_i est i.i.d. avec $P(U_1 = 0) = P(U = 1) = 1/2$. Le but est alors de transmettre ces k bits d'information en utilisant le canal n fois et avec un coût total $\leq n\beta$. L'entrée du canal est $X = (X_1, \ldots X_n)$ et la sortie $Y = (Y_1 \ldots, Y_n)$. Le recepteur calcule un estimateur $\hat{U} = (\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_k)$ en fonctionde Y uniquement. Quelque soit le canal, montrer que si pour tout i $P(\hat{U}_i \neq U_i) < \epsilon$ alors

$$\frac{k}{n} \leq \frac{C(\beta)}{1 - H(\epsilon)}.$$

   On pourra d'abord montrer que $I(U; \hat{U}) \geq k(1 - H(\epsilon))$. Que dire si $\epsilon \to 0$?