Examen à la maison du cours de Théorie de l'Information et Codage
à rendre le 5 avril 2011.
Temps conseillé: 3h.

1. Problème 1:
   (a) Une source a un alphabet de 4 lettres a_1, a_2, a_3, a_4 avec des probabilités $p(a_1) > p(a_2) = p(a_3) = p(a_4)$. Trouver le plus petit q tel que $p(a_1) > q$ implique que $n_1 = 1$ où n_1 est la longueur du mot code correspondant à a_1 dans le code de Huffman binaire.
   (b) Montrer que si $p(a_1) = q$, il est possible de trouver un code de Huffman avec $n_1 > 1$.
   (c) On suppose maintenant que la source a un alphabet de K lettres et $p(a_1) > p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$. Est-ce que $p(a_1) > q$ implique encore $n_1 = 1$?
   (d) Si maintenant $p(a_1) \geq p(a_2) \geq \cdots \geq p(a_K)$, trouver le plus grand q' tel que $p(a_1) < q'$ implique $n_1 > 1$.

2. Problème 2: on considère le jeu suivant: à l'étape n, le joueur dispose d'un montant S_n. Le casino tire à pile ou face avec probabilité 1/2. Si le résultat est pile, le casino double la mise du joueur: $S_{n+1} = 2S_n$, sinon le joueur perd les 2/3 de sa mise: $S_{n+1} = S_n/3$. Le jeu commence avec $S_1 = 1$.
   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n^{1/n}$.
   (b) Est-il vrai que $\mathbb{E}[\lim_n S_n] = \lim_n \mathbb{E}[S_n]$?

3. Problème 3: une variable aléatoire prend ses valeurs dans un alphabet de K lettres et chaque lettre a la même probabilité. Ces lettres sont encodées dans des mots binaires de façon à minimiser la longueur moyenne des mots code. On définit l'entier j et $1 \leq x < 2$ par $K = x2^j$.
   (a) Montrer que tous les mots code ont pour longueur j ou $j+1$.
   (b) Quelle est la longueur moyenne d'un mot code?

4. Problème 4:
   (a) Deux sources discrètes sans mémoire émettent des symboles dans $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$. La source 1 a pour statistique: $p_1 = (1-\alpha, \alpha, 0)$ et la source 2 pour statistique $p_2 = (0, \alpha, 1-\alpha)$ avec $\alpha \in (0, 1)$. Le but est d'encoder en binaire la suite de symboles dans $\mathcal{U}$ sans savoir quelle source $i = 1, 2$ va émettre. Pour simplifier, nous allons négliger les contraintes assurant que les longueurs des mots code sont des entiers. Un code est donc simplement une distribution de probabilité q sur $\mathcal{U}$, les longueurs des mots code correspondant étant $\ell(u) = -\log q(u)$. Nous avons vu en cours que si nous savons quelle source émet, il est possible de construire un code avec des mots code de longeur $\ell(u) = -\log p_i(u)$, ce code ayant une longueur moyenne égale à l'entropie de la source $H_i(U) = -\sum_{u\in\mathcal{U}} p_i(u) \log p_i(u)$. On définit la redondance d'un code comme la différence entre sa longueur moyenne et l'entropie de la source. Ainsi pour un code donné q, $R_i(q)$ est la redondance si la source qui émet est $i \in \{1, 2\}$. La redondance pire cas est alors $R(q) = \max\{R_1(q), R_2(q)\}$. Expliciter le code q minimisant la redondance pire cas $R(q)$.

(b) On considère le canal de $\{1, 2\}$ dans $\mathcal{U}$ suivant: si i est transmis, la loi du symbole émis en sortie est p_i. Calculer la capacité du canal.

(c) Comparer la redoncance pire cas et la capacité du canal. Est-ce une coïncidence?

5. Problème 5:

   (a) On considère deux canaux discrets sans mémoire, $(\mathcal{X}_1, p(y_1|x_1), \mathcal{Y}_1)$ et $(\mathcal{X}_2, p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_2)$, de capacités respectives C_1 et C_2. On forme alors le nouveau canal $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y_1|x_1)p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)$ où on utilise simultanément les deux canaux en parallèle. Quelle est la capacité de ce nouveau canal?

   (b) Etant donné un canal discret sans mémoire $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ de capacité C, on considère le canal où deux sorties indépendantes sont observées pour chaque entrée: $(\mathcal{X}, p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|x), \mathcal{Y} \times \mathcal{Y})$ de capacité C_2. Montrer que $C_2 \leq 2C$.

6. Problème 6: en utilisant le code de Hamming $(7, 4)$ vu en cours, résoudre le problème suivant:

   (a) Il y a 7 prisonniers dans une salle. Chacun a un chapeau bleu ou rouge avec probabilité $1/2$ indépendamment des autres. Chaque prisonnier connaît la couleur des chapeaux des autres prisoniers mais aucun prisonnier ne connaît la couleur de son propre chapeau. Le gardien de prison demande aux prisoniers de deviner la couleur de leur chapeau: si un prisonnier se trompe, tous les prisonniers sont tués. Un prisonnier a la possibilité de ne rien dire (au lieu de deviner) mais si aucun prisonnier ne parle, ils sont également tous tués. Quelle est la stratégie optimale que les prisonniers doivent suivre pour maximiser leur chance de survie? Aucune communication n'est permise entre les prisonniers sauf pour fixer la stratégie avant de rentrer dans la salle et le gardien de prison interroge chaque prisonnier séparemment.