Solutions des Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage

cours 6 du 22 mars 2011.

1. Canal avec mémoire. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice stochastique $r \times r$. Soit $\mathbf{p}$ le vecteur de probabilité stable par A: $p_j = \sum_i p_i a_{ij}$. Soit $Z_1, Z_2, \ldots$ la chaîne de Markov associée à A avec Z_1 de loi $\mathbf{p}$. L'entropie de la chaîne est définie par

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(Z_1, \ldots, Z_n).$$

On considère le canal avec alphabets $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ donné par

$$Y_i = X_i + Z_i \text{ (mod) } r.$$

On définit alors $C^n_{\max} = \max\{I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\}$ où $\mathbf{X}$ est une source test de dimension n. Montrer que la capacité du canal vaut

$$C_{\max} = \sup \frac{C^n_{\max}}{n} = \log r - H.$$

   - Pour n fixé, on a $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Z})$. En prenant les composantes de $\mathbf{X}$ iid uniformément distribués sur A_X, on obtient: $C^n_{\max} = n \log r - H(Z_1, \ldots, Z_n)$ et donc le résultat demandé.

2. Calculer la fonction capacité-coût du canal à effacement:

$$Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}, \qquad b(0) = 0, b(1) = 1.$$

   - On a $\beta_{min} = 0$ et $C(0) = 0$. Pour $0 \leq \beta \leq \beta_{max}$, un petit calcul donne $C(\beta) = qH(\beta)$ et donc $\beta_{max} = 1/2$ et $C_{max} = q$.

3. Pour le canal avec $\mathcal{X} = \{0, 1/2, 1\}$ et $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } b(0) = b(1) = 1, \; b(1/2) = 0,$$

expliciter un code qui satisfait les conditions du théorème de codage de canal.

   - Avec les notations du cours, on prend $\beta_0 \geq 0$ puis $\beta > \beta_0$, $R < \min(\beta_0, 1)$ et $\epsilon > 0$. On choisit maintenant $n \geq 1/(\min(\beta, 1) - R)$ et le code $C = \{(x_1, \ldots, x_{\lceil Rn \rceil}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})\}$ de longueur n avec la règle de décodage vue en cours.

4. Dans le cas du canal binaire symétrique, montrer que l'ensemble T défini dans la preuve du Théorème 5.4 est de la forme $T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$, où d_H est la distance de Hamming. Exprimer r en fonction de n, R' et ϵ la probabilité d'erreur du canal. (On supposera $p(x = 0) = p(x = 1) = 1/2$.)

- On a $I(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \log_2(p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{y})^{-1})$ de plus: $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \epsilon^{d_H(\mathbf{x},\mathbf{y})}(1-\epsilon)^{n-d_H(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ et d'après l'hypothèse faite sur $\mathbf{x}$, $p(\mathbf{y}) = 2^{-n}$. On a donc

  $$I(\mathbf{x};\mathbf{y}) = d_H(\mathbf{x},\mathbf{y})\log\epsilon + (n - d_H(\mathbf{x},\mathbf{y}))\log(1-\epsilon) + n,$$

  et donc:

  $$r = n\frac{\log(1-\epsilon) + 1 - R'}{\log(1-\epsilon) - \log\epsilon}.$$