Solutions des Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage

cours 5 du 15 mars 2011.

1. Exercice mathématique: Montrer que la fonction $\beta \to C(\beta)$ est continue en $\beta_{\min}$.

   - Soit p_n une suite de vecteurs de probabilité représentant des sources test qui atteignent les capacités $C(\beta_{\min} + 1/n)$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite qui converge vers p. Si X est la source test corresponandt à p, alors $E[b(X)] = \beta_{\min}$ donc $I(X;Y) \leq C(\beta_{min})$. De plus $I(X;Y) = \lim_{\beta \downarrow \beta_{\min}} C(\beta)$. Donc on a $\lim_{\beta \downarrow \beta_{\min}} C(\beta) \leq C(\beta_{min})$. Comme $\beta \to C(\beta)$ est croissante pour $\beta \geq \beta_{\min}$, le résultat est prouvé.

2. Un canal sans mémoire est dit symétrique si la matrice stochastique Q est telle que: toute ligne de Q est une permutation des autres lignes et chaque colonne est aussi une permutation des autres colonnes. Voici un exemple:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que pour un canal discret sans mémoire symétrique ayant un alphabet d'entrée de taille r et de sortie s, sa capacité est obtenue avec des entrées équiprobables et vaut:

$$C_{\max} = \log s - H(q_0, q_1, \dots, q_{s-1}),$$

   où $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ est une ligne de la matrice de transition.

   - On écrit:

$$I(X;Y) \quad = \quad H(Y) - H(Y|X) \text{ avec, } H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x).$$

     Comme chaque ligne de la matrice est une permutation de $(q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$, on a

$$H(Y|X=x) = -\sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log p(y|x) = H(q_0, q_1, \dots, q_{s-1}),$$

     qui ne dépend pas de x. De plus $H(Y) \leq \log s$ avec égalité si Y a une loi uniforme sur $\{0, \dots, s-1\}$. D'après la condition sur les colonnes de la matrice, si X est de loi uniforme sur $\{0, \dots, r-1\}$ alors Y est de loi uniforme sur $\{0, \dots, s-1\}$, d'où le résultat.
   - On pourra remarquer que la seule condition utilisée est en fait que chaque ligne de la matrice a une entropie et une somme des colonnes constantes.

3. On considère le système de communication vu en cours mais pour un canal quelconque: une source d'information émet une suite $U = (U_1, \dots, U_k)$. On suppose de plus que la suite des U_i est i.i.d. avec $P(U_1 = 0) = P(U = 1) = 1/2$. Le but est alors de transmettre ces k bits d'information en utilisant le canal n fois et avec un coût total $\leq n\beta$. L'entrée du canal est $X = (X_1, \dots X_n)$ et la sortie $Y = (Y_1 \dots, Y_n)$. Le recepteur calcule un estimateur $\hat{U} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_k)$ en fonctionde Y uniquement. Quelque soit le canal, montrer que si pour tout i, $P(\hat{U}_i \neq U_i) < \epsilon$ alors

$$\frac{k}{n} \leq \frac{C(\beta)}{1 - H(\epsilon)}.$$

   On pourra d'abord montrer que $I(U;\hat{U}) \geq k(1 - H(\epsilon))$. Que dire si $\epsilon \to 0$?

- Par le résultat de l'exercice 2 de la fiche 4:

$$\begin{aligned} I(U;\hat{U}) &\geq \sum_{i=1}^{k} I(U_i;\hat{U}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} H(U_i) - H(U_i|\hat{U}_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} 1 - H(\epsilon) \text{ par l'inégalité de Fano.} \end{aligned}$$

  On a donc bien $I(U;\hat{U}) \geq k(1 - H(\epsilon))$ de plus par l'inégalité 'data-processing', on a $I(U;\hat{U}) \leq I(X;Y) \leq C_n(\beta)$ et donc

$$\frac{k}{n} \leq \frac{\frac{1}{n}C_n(\beta)}{1 - H(\epsilon)} \leq \frac{C(\beta)}{1 - H(\epsilon)}.$$

  Noter que cette inégalité est vraie sans faire l'hypothèse d'un canal sans mémoire.

- La fonction $\epsilon \mapsto (1 - H(\epsilon))^{-1}$ est croissante en $\epsilon \leq 1/2$ et tend vers 1 quand ϵ tend vers 0. Donc pour avoir une probabilité d'erreur aussi petite que souhaitée, il faut que $\frac{k}{n} \leq C(\beta)$. c'est la réciproque du théorème de codage de canal (valable sans hypothèse sur le canal).