

Théorie de l'information et du codage

TD n°8 – CODES DE REED-MULLER

Historiquement, le code $RM(5, 1)$ a été utilisé par les sondes *Mariner* lancées par la NASA entre 1969 et 1973 pour assurer une transmission correcte des photos numérisées de Mars. Chaque pixel est décrit par un niveau de gris pouvant prendre 64 valeurs, lequel est encodé en un mot de 32 bits immunisé contre des taux d'erreurs de près de 25% !

Soient m et r des entiers. On note $\mathbb{F}_2^r[X_1, \dots, X_m]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus r à m variables sur le corps \mathbb{F}_2 , et l'on pose :

$$RM(m, r) = \{(f(v_1), \dots, f(v_{2^m})) ; f \in \mathbb{F}_2^r[X_1, \dots, X_m]\},$$

où v_1, \dots, v_{2^m} sont les éléments de \mathbb{F}_2^m , disons dans l'ordre lexicographique. C'est le code de Reed-Muller binaire de longueur 2^m et d'ordre r .

Question 1. *Montrer que $RM(m, r)$ est un code linéaire puis calculer sa dimension.*

Question 2. *Donner une matrice génératrice de $RM(m, r)$ pour $m = 3, r = 2$. Fournir une construction récursive dans le cas général.*

Question 3. *Calculer la distance de $RM(m, r)$.*

Question 4. *Déterminer l'orthogonal de $RM(m, r)$.*

Question 5. *Justifier les valeurs numériques mentionnées dans l'introduction.*