Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage
cours 8 du 6 avril 2010.

1. Soit C un code linéaire sur les entiers $F_3 = \{0, 1, 2\}$ modulo 3 généré par la matrice
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Décoder par la méthode du sydrome les vecteurs: $2121, 1201, 2222$.

2. Montrer que si C est un code linéaire sur F_2 et toute combinaison linéaire de $\leq e$ colonnes de H sont distinctes alors $d_{\min}(C) \geq 2e + 1$ et le code C peut corriger des erreurs de poids $\leq e$.

3. Soit C un code (n, k)-linéaire sur F_q et pour tout $\mathbf{y} \in F_q^n$, on définit $C - \mathbf{y} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y},\, \mathbf{x} \in C\}$. $C - \mathbf{y}$ est un coset de C. Montrer que $C - \mathbf{y} = C$ ssi $\mathbf{y} \in C$, puis que:
   - si $\mathbf{x}_j$ est un mot code de C, le nombre de mots code à distance de Hamming i de $\mathbf{x}_j$ est A_i, le nombre de mots code de poids i.
   - le nombre de paires de mots code $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ avec $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = i$ est exactement $q^k A_i$.

4. Pour n et d fixés, soit $M_L(n, d)$ le nombre maximum de mots code d'un code linéaire binaire de longueur n et de distance minimale $\geq d$. Montrer que
$$M_L(n, d) \geq \frac{2^n}{1 + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{d-2}}.$$