Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage

cours 4 du 2 mars 2010.

1. Montrer que $I(X;Y)$ est une fonction concave de $p(x)$ (avec $p(y|x)$ fixée) et une fonction convexe de $p(y|x)$ (avec $p(x)$ fixée).

2. Montrer que si les composantes de $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_k)$ sont indépendantes alors $I(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \geq \sum_{i=1}^{k} I(U_i; V_i)$.

3. Dans la démonstration du théorème 4.2 ($R_k(\delta) = kR_1(\delta)$), donner les détails finaux: $E(d) \leq k\delta$ et $I(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = kR_1(\delta)$.

4. Si X, Y et Z sont des v.a. discrètes, on définit l'information mutuelle conditionelle $I(X;Y|Z)$ comme suit

   $$I(X;Y|Z) = \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)}.$$

   Montrer que $I(X;Y|Z) = I(Y;X|Z)$;
   $I(X;Y,Z) = I(X;Z) + I(X;Y|Z)$;
   $I(X;Y|Z) \geq 0$ avec égalité ssi (X,Z,Y) est une chaîne de Markov.

5. Soit X une variable aléatoire (continue) suivant une loi normale centrée et de variance σ^2, i.e de densité $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. On considère la mesure de distorsion des moindes carrés et qu'un seul bit est disponible pour représenter X, c'est à dire l'alphabet de destination a deux éléments. Quel est l'alphabet de destination optimal? Calculer la distorsion correspondante.