Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage

cours 6 du 31 mars 2009.

1. Canal avec mémoire. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice stochastique $r \times r$. Soit $\mathbf{p}$ le vecteur de probabilité stable par A: $p_j = \sum_i p_i a_{ij}$. Soit $Z_1, Z_2, \ldots$ la chaîne de Markov associée à A avec Z_1 de loi $\mathbf{p}$. L'entropie de la chaîne est définie par

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(Z_1, \ldots, Z_n).$$

On considère le canal avec alphabets $A_X = A_Y = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ donné par

$$Y_i = X_i + Z_i \pmod{r}.$$

On définit alors $C^n_{\max} = \max\{I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})\}$ où $\mathbf{X}$ est une source test de dimension n. Montrer que la capacité du canal vaut

$$C_{\max} = \sup \frac{C^n_{\max}}{n} = \log r - H.$$

2. Calculer la fonction capacité-coût du canal à effacement:

$$Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}, \qquad b(0) = 0, b(1) = 1.$$

3. Pour le canal de l'exemple 5.2, expliciter un code qui satisfait les conditions du théorème de codage de canal.

4. Dans le cas du canal binaire symétrique, montrer que l'ensemble T défini dans la preuve du Théorème 5.4 est de la forme $T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$, où d_H est la distance de Hamming. Expremier r en fonction de n, R' et ϵ la probabilité d'erreur du canal. (On supposera $p(x = 0) = p(y = 0) = 1/2$.)

5. Calculer la capacité du canal à suppression (avec probabilité p un symbole n'arrive pas au recepteur; les symboles non supprimés arrivent intacts mais translatés à gauche, de telle sorte que le recepteur ne connaît pas quels symboles ont été supprimés).