Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage
cours 4 du 10 mars 2009.

1. Montrer que $I(X;Y)$ est une fonction concave de $p(x)$ (avec $p(y|x)$ fixée) et une fonction convexe de $p(y|x)$ (avec $p(x)$ fixée).

2. Montrer que si les composantes de $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_k)$ sont indépendantes alors $I(\mathbf{U};\mathbf{V}) \geq \sum_{i=1}^{k} I(U_i;V_i)$.

3. Dans la démonstration du théorème 4.2 ($R_k(\delta) = kR_1(\delta)$), donner les détails finaux: $E(d) \leq k\delta$ et $I(\mathbf{U};\mathbf{V}) = kR_1(\delta)$.

4. Soit X une variable aléatoire (continue) suivant une loi normale centrée et de variance σ^2, i.e de densité $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. On considère la mesure de distorsion des moindes carrés et qu'un seul bit est disponible pour représenter X, c'est à dire l'alphabet de destination a deux éléments. Quel est l'alphabet de destination optimal? Calculer la distorsion correspondante.

5. Soient $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_k)$ les k premiers symboles émis par la source. On suppose que ces k symboles sont "compressés" en n bits $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et qu'il est possible de reconstruire à partir de $\mathbf{X}$ k symboles $\mathbf{V} = (V_1, \ldots V_k)$ avec $\sum_i \mathbb{E}[d(U_i, V_i)] \leq k\delta$. Montrer que

$$\frac{n}{k} \geq R(\delta).$$

Interprétation?