Exercices du cours de Théorie de l'Information et Codage
cours 1 du 17 février 2009.

1. Dans le cas $R = 1/2n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et pour un encodage du type: répétition de chaque bit $2n$ fois sur le canal BSC: donner une stratégie de décodage et calculer la probabilité d'erreur correspondante P_e. Comparer au cas $R = 1/(2n-1)$ étudié en cours quand $p \to 0$.

2. On considère le cas $R = 2n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et l'encodage: j'envoie la majorité de chacun des blocs de $2n+1$ bits successifs émis par la source (comme décrit en cours pour $R = 3$). Montrer que $P_e = (1-p)Q + p(1-Q)$ avec
$$Q = \frac{1}{2} - \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$
Montrer que dans le cas $R = 2n$, une stratégie similaire donne exactement la même probabilité d'erreur P_e.

3. Vérifier les formules pour les probabilités d'erreur par bit données dans le cours pour le code de Hamming.

4. Soit X une v.a. discrète à espace d'états E et f une fonction réelle définie sur E. Montrer que $H(X) \geq H(f(X))$, avec égalité ssi f restreinte à $\{x : \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ est une bijection.

5. Etant donnés une probabilité $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et un entier $m \leq n$, on définit $q_m = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j$. Montrer que $H(p_1, \ldots, p_n) \leq H(p_1, \ldots, p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$. Cas d'égalité?

6. Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \geq 1$. Si X est une v.a. discrète à espace d'états $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on définit la f-entropie de X par $H_f(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(1/p_i)$, où $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Si f est concave, trouver la meilleur borne supérieure pour $H_f(X)$ qui ne dépende que de n. Si $f(x) = \log(x)/x$, montrer que $H_f(X) < \log(e)/e$. Montrer qu'en fait, $H_f(X) \leq \log(3)/3$, avec égalité ssi exactement trois p_i sont égaux à $1/3$ et le reste à 0.

7. Dans l'exemple 4 du cours (DMC $Y = X^2$), montrer que $Cov(X, Y) = 0$ et $I(X; Y) = 1$ bit.

8. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur la distribution jointe $p(x, y, z)$ pour qu'il y ait égalité dans le Théorème 1.2. Pour tout $r \geq 2$ et toute valeur $P_e \in [0, 1]$, construire des v.a. X et Y à valeurs dans $\{1, \ldots, r\}$ pour lesquelles l'inégalité de Fano est optimale.

9. Montrer que l'inégalité de Fano donne une borne supérieure et une borne inférieure pour P_e en fonction de $H(X|Y)$. Donner une interprétation heuristique pour la borne supérieure.

10. Si X, Y et Z sont des v.a. discrètes, on définit l'information mutuelle conditionelle $I(X; Y|Z)$ comme suit
$$I(X; Y|Z) = \sum_{x,y,z} p(x, y, z) \log \frac{p(x, y|z)}{p(x|z)p(y|z)}.$$
Montrer que $I(X; Y|Z) = I(Y; X|Z)$;
$I(X; Y, Z) = I(X; Z) + I(X; Y|Z)$;
$I(X; Y|Z) \geq 0$ avec égalité ssi (X, Z, Y) est une chaîne de Markov.