Algorithms for Networked Information
TD2

29 octobre 2014

Exercice 1 Algorithme de Goldberg-Tarjan pour les flots maximaux

Soit $G = (V,E)$ un graphe orienté. On note $n = |V|$ et $m = |E|$. Pour chaque arête $(v,w) \in E$, on définit une capacité $c(v,w) > 0$ et par convention, on prend $c(v,w) = 0$ si $(v,w) \notin E$. Étant donné une source s et un puit t dans V, un flot dans G est une fonction f des pairs de sommets à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) capacité : $f(v,w) \leq c(v,w)$ pour tout $(v,w) \in V \times V$,
(ii) antisymmétrie : $f(v,w) = -f(w,v)$ pour tout $(v,w) \in V \times V$,
(iii) conservation : $\sum_{u \in V} f(u,v) = 0$ pour tout $v \in V \setminus \{s,t\}$.

La valeur du flot f est $\sum_{v \in V} f(v,t)$ et un flot maximal est un flot de valeur maximale.

Une coupe $(X,\overline{X})$ est une partition de l'ensemble des sommets ($X \cup \overline{X} = V$ et $X \cap \overline{X} = \emptyset$) telle que $s \in X$ et $t \in \overline{X}$. La capacité de la coupe est $c(X,\overline{X}) = \sum_{v \in X, w \in \overline{X}} c(v,w)$. Si f est un flot, le flot au travers de la coupe est $f(X,\overline{X}) = \sum_{v \in X, w \in \overline{X}} f(v,w)$. Le principe de conservation implique que cette valeur est égale à la valeur du flot. De plus la contrainte de capacité implique que $f(X,\overline{X}) \leq c(X,\overline{X})$. Donc la valeur d'un flot maximal est inférieure ou égale à la capacité d'une coupe minimale. Le théorème de Ford et Fulkerson montre que ces deux quantités sont égales.

Nous allons définir un algorithme calculant une coupe minimale et un flot maximal. Pour cela, nous introduisons la notion de préflot f : une fonction des pairs de sommets à valeur dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (i) et (ii) mais une forme affaiblie de (iii) :

(iii') $\sum_{u \in V} f(u,v) \geq 0$ pour tout $v \in V \setminus \{s\}$.

Le flot en excès au sommet $v \neq s$ est alors $e(v) = \sum_{u \in V} f(u,v) \geq 0$. Un préflot tel que $e(v) = 0$ pour tout $v \in V - \{s,t\}$ est un flot.

Pour un préflot f, nous définissons la capacité résiduelle de (v,w) notée $r_f(v,w) = c(v,w) - f(v,w)$. Si $r_f(v,w) > 0$ alors l'arc dirigé (v,w) est un arc résiduel et le graph résiduel du préflot est $G_f = (V,E_f)$ le graphe ayant pour ensemble de sommets V et pour ensemble d'arêtes E_f, les arcs résiduels. Un chemin f-augmentant est un chemin de s à t dans G_f.

1. (rappel) Montrer qu'un flot est maximal si et seulement si il n'existe pas de chemin f-augmentant (on pourra considérer l'ensemble $S_f = \{v \in V \mid$ il existe un chemin de s à v dans $G_f\} \cup \{s\}$)
2. (rappel) En déduire le théorème de Ford et Fulkerson. Comment à partir d'un flot maximal trouver une (s,t)-coupe minimale ?

Pour définir l'algorithme, nous avons besoin d'une fonction de l'ensemble des sommets dans $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ telle que : $h(s) = n$, $h(t) = 0$ et $h(v) \leq h(w) + 1$ pour toute arête résiduelle (v,w). Nous appellerons une fonction satisfaisant ces conditions une fonction hauteur pour f. Un sommet v sera dit actif si $v \in V \setminus \{s,t\}$, $h(v) < \infty$ et $e(v) > 0$.

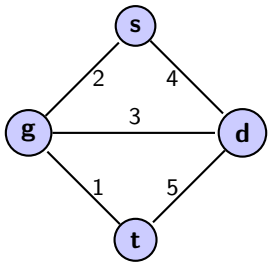
L'algorithme commence avec le préflot f qui est égal à la capacité des arêtes pour chaque arête sortant de la source et zéro sur toutes les autres arêtes. La fonction de hauteur initiale est $h(s) = n$ et $h(v) = 0$ pour tout $v \in V \setminus \{s\}$. L'algorithme réalise ensuite les deux opérations *push* et *relabel* tant que possible et dans un ordre quelconque. Lorsqu'il n'y a plus de sommets actifs, l'algorithme a terminé.

push(v,w) :
- Conditions : v est actif, $r_f(v,w) > 0$ et $h(v) = h(w) + 1$.
- Action : envois $\delta = \min(e(v), r_f(v,w))$ de flot de v vers w comme suit :

$$f(v,w) \leftarrow f(v,w) + \delta,\ f(w,v) \leftarrow f(w,v) - \delta,\ e(v) \leftarrow e(v) - \delta,\ e(w) \leftarrow e(w) + \delta.$$

relabel(v)
- Conditions : v est actif et $\forall w \in V$, si $r_f(v,w) > 0$ alors $h(v) \leq h(w)$.
- Action : $h(v) \leftarrow \min\{h(w) + 1 \mid (v,w) \in E_f\}$ (avec le minimum sur l'ensemble vide égal à ∞).

3. Vérifier que l'algorithme est correct sur l'exemple suivant (graphe non-orienté, i.e. $c(u,v) = c(v,u)$) :



Nous allons montrer que l'algorithme est correct et étudier sa complexité. Nous dirons qu'une opération *push*(v,w) est saturante si $r_f(v,w) = 0$ après le *push* et non-saturante sinon.

4. Si f est un préflot, h une fonction de hauteur pour f et v un sommet actif, montrer qu'alors une opération *push* ou *relabel* est applicable sur v.
5. Montrer qu'à tout moment, la fonction h est une fonction de hauteur pour f.
6. Montrer que si f est un préflot et h une fonction de hauteur pour f alors le puits t n'est pas atteignable depuis la source s dans G_f.
7. En utilisant le résultat de la question 1, en déduire que si l'algorithme termine et que toutes les hauteurs sont finies alors le préflot calculé est un flot maximal.
8. Montrer que pour tout sommet v, la hauteur $h(v)$ ne décroit jamais. De plus, une opération *relabel*(v) augmente $h(v)$ strictement.
9. Soit f un préflot et S l'ensemble des sommets atteignables depuis v dans G_f. Montrer que si $s \notin S$ alors $\sum_{w \in S} e(w) \leq 0$. En déduire que si v est tel que $e(v) > 0$ alors la source s est atteignable depuis v dans G_f.
10. En déduire qu'à tout moment de l'execution de l'algorithme et pour tout sommet v, on a $h(v) \leq 2n - 1$.
11. En déduire que le nombre total d'opération *relabel* est borné par $2n^2$. En déduire également que le nombre d'opérations *push* saturante est bornée par $2nm$.
12. Soit $\Phi = \sum_{v,\text{actif}} h(v)$. Montrer qu'une opération *push* non-saturante fait décroître Φ d'au moins 1. En déduire que le nombre d'opérations *push* non-saturante est au plus $4n^2m$.
13. En déduire que l'algorithme finit après $O(n^2m)$ opérations élémentaires.

Exercice 2 La plus petite communauté forte

Le but de cet exercice et de montrer qu'il est NP-difficile de trouver la plus petite $\frac{1}{2}$-communauté qui contient un nœud v donné. Pour cela, on donne une réduction du problème SetCover. L'entrée de SetCover est un ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec un ensemble $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de parties de X. La sortie est le cardinal minimal d'un $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ tel que $\bigcup \mathcal{T} = X$. On appelle un tel $\mathcal{T}$ un *cover*.

Supposons que $m \leq n$. On définit un graphe avec 4 types de nœuds :
– $4mn^2 + 1$ nœuds dans le classe B
– n nœuds dans la classe F

– n nœuds dans la classe N : un nœud v_i pour chaque $x_i \in X$
– $(2n+1)m$ nœuds dans la classe M : $2n+1$ nœuds $s_{j,1}, s_{j,2}, \ldots, s_{j,2n+1}$ pour chaque ensemble $S_j \in \mathscr{S}$

Le graphe contient les arcs suivants :

– Les classes B et N sont des cliques.
– Chaque nœud de F a n voisins distincts dans B.
– Le nœud v_i a $2n+1-\#\{j \mid x_i \in S_j\}$ voisins distincts dans B et a des arcs vers tous les nœuds dans F.
– Pour chaque $S_j \in \mathscr{S}$, les nœuds $s_{j,1}, s_{j,2}, \ldots, s_{j,2n+1}$ sont une clique.
– Si $x_i \in S_j$, alors v_i est un voisin de $s_{j,1}$.
– Chacun des nœuds $s_{j,2}, \ldots, s_{j,2n+1}$ a $2n$ voisins distincts dans B.
– Le nœud $s_{j,1}$ a $2n + \#S_j$ voisins distincts dans B.

1. Construire une communauté forte de taille $k(2n+1)+2n$ dans ce graphe à partir d'un cover $\mathscr{T}$ de taille k.
2. Construire un cover de taille au plus k à partir d'une communauté forte de taille au plus $k(2n+1)+2n$.
3. Conclure.