Algorithms for Networked Information
TD1

22 octobre 2014

Exercice 1 Théorie des jeux

1. Dans Indiana Jones et la Dernière Croisade, le héros voit son père grièvement blessé par les nazis. Le seul moyen de le sauver est de lui apporter le Saint Graal. Or, le Graal se trouve parmi plusieurs autres coupes qui se ressemblent. Le vrai Graal donne la vie éternelle, alors que les autres coupes tuent la personne qui boit. Dans le film, Indy choisit une coupe et boit.
Montrer que donner la coupe directement au père est une stratégie dominante.
2. Trouver les stratégies dominantes et les équilibres de Nash du jeu suivant :

	L	M	H
t	3 0	2 6	1 1
m	3 2	1 0	7 0
b	3 5	2 4	1 3

Exercice 2 Revenu espéré

Supposons qu'il y a 2 enchérisseurs dans une enchère de Vickrey. L'estimation de chacun des enchérisseurs est indépendamment 1 ou 3 avec probabilité 1/2.

1. Quel est le revenu espéré du vendeur ?
2. Comment évolue le revenu quand le nombre d'enchérisseurs augmente ?

Exercice 3 Prix de réserve

Nous considérons maintenant un cas où le vendeur a également une évaluation du bien notée $u \geq 0$ qui est donc le revenu du vendeur s'il décide de garder le bien. Dans ce cas le vendeur peut annoncer un prix de réserve r avant le début de l'enchère. Le bien n'est vendu que si l'offre la plus grande dépasse r. Dans ce cas et dans une enchère au second prix, le montant payé est le maximum entre r et la seconde meilleure offre.

1. Montrer que la stratégie dominante reste de dire la vérité.
2. Considérer le cas $u = 0$ avec un seul enchérisseur ayant une évaluation uniformément distribuée dans $[0,1]$. Quel est le prix de réserve optimal ? Généraliser au cas $u \geq 0$.

Exercice 4 Collusion dans une enchère de Vickrey

Supposons que deux enchérisseurs choisissent de se concerter pour maximiser la somme de leurs utilités.

1. S'il n'y a pas d'autres enchérisseurs, quelles sont les offres optimales ?

2. Les offres optimales changent-elles s'il y a un troisième enchérisseur ?

Exercice 5 Equilibre pour les enchères au premier prix

Nous allons analyser un cas où les enchérisseurs connaissent le nombre total d'agents et ont une information partielle concernant les évaluations du bien des compétiteurs. Commençons par un cas simple : l'évaluation de chacun des agents est tirée selon une loi uniforme sur $[0,1]$ indépendamment les unes des autres. Chaque agent connaît sa propre évaluation du bien et sait que les autres évaluations sont indépendantes, uniformes dans $[0,1]$.

Une stratégie pour un agent est une fonction $s(v) = b$ qui prend en argument son évaluation privée et renvoie une offre $b \geq 0$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(i) $s(.)$ est strictement croissante et dérivable.

(ii) $s(v) \leq v$.

Enfin, comme tous les agents sont identiques sauf pour leur évaluation du bien, nous ne considérerons que le cas, où tous les agents adoptent la même stratégie $s(.)$.

Nous considérons tout d'abord le cas de 2 enchérisseurs.

1. Sous nos hypothèses, est-ce que les deux offres peuvent être égales ?
2. Quelle est l'utilité moyenne en fonction de la vraie estimation v ?

Il faut maintenant définir la notion d'équilibre pour notre jeux. Comme nous ne considérons que des cas symétriques, la seule manière pour un joueur de dévier est de mentir sur sa vraie valeur.

3. Ecrire la condition d'équilibre.
4. Montrer que $s(v) = v/2$ est une solution d'équilibre. Caractériser les équilibres possibles.
5. Quel est le revenu pour le vendeur ? Aurait-il mieux fait de faire une enchère au second prix ?

Nous considérons maintenant le cas de $n \geq 2$ enchérisseurs, n étant une information publique.

6. Calculer la(les) solution(s) d'équilibre.
7. Calculer le revenu du vendeur. Comparer au revenu généré par VCG.

Nous considérons maintenant une enchère où chacun des enchérisseurs paye son offre et seul l'enchérisseur ayant fait la meilleur offre obtient le bien.

8. Dans le cadre précédent, calculer le revenu moyen d'un enchérisseur. Calculer la(les) solution(s) d'équilibre.
9. Calculer le revenu du vendeur.