Algorithms for Networked Information **2014**

Cours 1 — 15 Octobre

Enseignant: Marc Lelarge

<u>Pour information</u>

- Page web du cours
  `http://www.di.ens.fr/~lelarge/ani.html`

Le théorème de Perron-Frobenius

Un vecteur est (resp. strictement) positif si chacune de ses composantes est (resp. strictement) positive. Pour une matrice $T = (T_{ij})$, on note $T \geq 0$ (resp. $T > 0$) si pour tout i, j, $T_{ij} \geq 0$ (resp. $T_{ij} > 0$). L'élément ij de la matrice carrée T élevée à la puissance k est noté $T_{ij}^{(k)}$.

Définition 1.0.1 *Une matrice carrée positive T est dite primitive s'il existe $k > 0$ tel que $T^k > 0$, i.e. $T_{ij}^{(k)} > 0$ pour tout i, j.*

Théorème 1.0.1 *Soit T une matrice positive et primitive. Alors il existe une valeur propre r telle que*

1. *r est rélle et strictement positive, $r > 0$;*
2. *à r sont associés des vecteurs propres à gauche et à droite strictement positifs ;*
3. *$r > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq r$.*
4. *les vecteurs propres associés à r sont uniques à une constante mulptiplicative près.*

La preuve est tirée du livre : 'Non-negative Matrices and Markov Chains' de E. Seneta.

Démonstration. Pour $\mathbf{x} \geq 0$ avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, on définit

$$r(\mathbf{x}) = \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j},$$

où le ratio est infini si $x_j = 0$. Il est clair que $0 \leq r(\mathbf{x}) < \infty$.

Nous montrons maintenant que $r(\mathbf{x})$ est borné uniformément en $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} x_j r(\mathbf{x}) &\leq \sum_i x_i T_{ij} \text{ pour tout } j, \\ \mathbf{x}^t r(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{x}^t T \\ r(\mathbf{x})\mathbf{x}^t\mathbf{1} &\leq \mathbf{x}^t T\mathbf{1}, \end{aligned}$$

mais $T\mathbf{1} \leq K\mathbf{1}$ avec $K = \max_j \sum_i T_{ij}$, donc on a :

$$r(\mathbf{x}) \leq \frac{\mathbf{x}^t K\mathbf{1}}{\mathbf{x}^t\mathbf{1}} = K.$$

Comme T est primitive, elle ne contient pas de colonne nulle et donc $r(\mathbf{1}) > 0$. On a donc

$$r = \sup_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} \geq r(\mathbf{1}) > 0,$$

et $0 < r \leq K$. On peut normaliser $\mathbf{x}$ sans affecter r donc

$$r = \sup_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\mathbf{x}^t\mathbf{x}=1} \min_j \frac{\sum_i x_i T_{ij}}{x_j} \geq r(\mathbf{1}) > 0.$$

L'ensemble $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 1\}$ étant un compact de $\mathbb{R}^n$ et la fonction $\mathbf{x} \mapsto r(\mathbf{x})$ étant semi-continue supérieurement ($\limsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} r(\mathbf{x}) \leq r(\mathbf{x}_0)$), elle atteint sa borne supérieure. Il existe donc $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \neq \mathbf{0}$ tel que

$$\sum_i \hat{x}_i T_{ij} \geq r\hat{x}_j, \text{ pour tout } j. \tag{1.1}$$

Nous allons montrer que $\hat{\mathbf{x}}$ est en fait un vecteur propre à gauche pour T associé à la valeur propre r. On définit donc $\mathbf{z}^t = \hat{\mathbf{x}}^t T - r\hat{\mathbf{x}}^t \geq \mathbf{0}^t$ et on suppose par l'absurde que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Par hypothèse, il existe k tel que $T^k > 0$ et donc

$$\mathbf{z}^t T^k = \hat{\mathbf{x}}^t T^k T - r\hat{\mathbf{x}}^t T^k > \mathbf{0}^t.$$

En écrivant $\mathbf{y}^t = \hat{\mathbf{x}}^t T^k$, on a donc

$$\sum_j y_i T_{ij} > r y_j, \text{ pour tout } j,$$

ce qui est une contradiction de la définition de r. On donc bien $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et le premier point est démontré :

$$\hat{\mathbf{x}}^t T = r\hat{\mathbf{x}}^t \tag{1.2}$$

En itérant (1.2), on a :

$$\hat{\mathbf{x}}^t T^k = r^k \hat{\mathbf{x}}^t.$$

En choisissant $T^k > 0$ et comme $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \neq \mathbf{0}$, on a $\hat{\mathbf{x}}^t T^k > \mathbf{0}^t$ et donc $\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$, ce qui prouve le second point (le cas du vecteur à droite se fait de manière similaire).

Nous montrons maintenant le troisième point. Soit λ une valeur propre de T, c'est à dire pour un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ayant des valeurs possiblement complexes,

$$\sum_i x_i T_{ij} = \lambda x_j. \tag{1.3}$$

En prenant le module, on a donc

$$|\lambda||x_j| \leq \sum_i |x_i| T_{ij},$$

c'est à dire, $|\lambda| \leq \frac{\sum_i |x_i| T_{ij}}{|x_j|}$, donc $|\lambda| \leq r$.

Supposons par l'absurde que $|\lambda| = r$, on a alors

$$\sum_i |x_i| T_{ij} \geq r|x_j|.$$

Cette équation est exactement la même que (1.1), donc par le même raisonnement, on en déduit que

$$\sum_i |x_i| T_{ij} = r|x_j| > 0, \text{ pour tout } j,$$

c'est-à-dire que le vecteur $|\mathbf{x}|$ est un vecteur propre de T (à gauche) associé à la valeur propre r. On a donc

$$\sum_i |x_i| T_{ij}^{(k)} = |\lambda^k||x_j| > 0.$$

Or par (1.3), on a $\sum_i x_i T_{ij}^{(k)} = \lambda^k x_j$ donc au final, on a pour tout j, $|\sum_i x_i T_{ij}^{(k)}| = \sum_i |x_i| T_{ij}^{(k)}$ et $|x_j| > 0$.

On note que pour deux complexes $z, z' \neq 0$, si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors z et z' sonc colinéaires. On en déduit que tous les x_j sont colinéaires si bien que (1.3) se simplifie en

$$\sum_i |x_i| T_{ij} = \lambda |x_j|.$$

Comme $|x_j| > 0$ pour tout j, λ est réel, positif et comme nous avons supposé $|\lambda| = r$, on a $\lambda = r$.

Nous montrons maintenant le dernier point. Soit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre à gauche associé à r. Pour tout c, le vecteur $\eta = \hat{\mathbf{x}} - c\mathbf{y}$ (pourvu qu'il soit non nul) est un vecteur propre à gauche associé à r. Donc si $\mathbf{y}$ n'est pas un multiple de $\hat{\mathbf{x}}$, on peut choisir c tel que $\eta \neq \mathbf{0}$ mais que certaines composantes de η soient nulles. Or par l'argument précédent, $|\eta|$ est également un vecteur propre associé à r et est strictement positif. Ce dernier point contredit le fait que $\mathbf{y}$ et $\hat{\mathbf{x}}$ ne soient pas multiples.

Nous avons donné toutes les preuves pour les vecteurs propres à gauche et tous les arguments peuvent être répétés pour les vecteurs propres à droite. Le point 3 montre que le nombre r produit par l'analyse des vecteurs propres à droite est le même que ci-dessus.
□