

Power-law random graphs

Laurent Massoulié

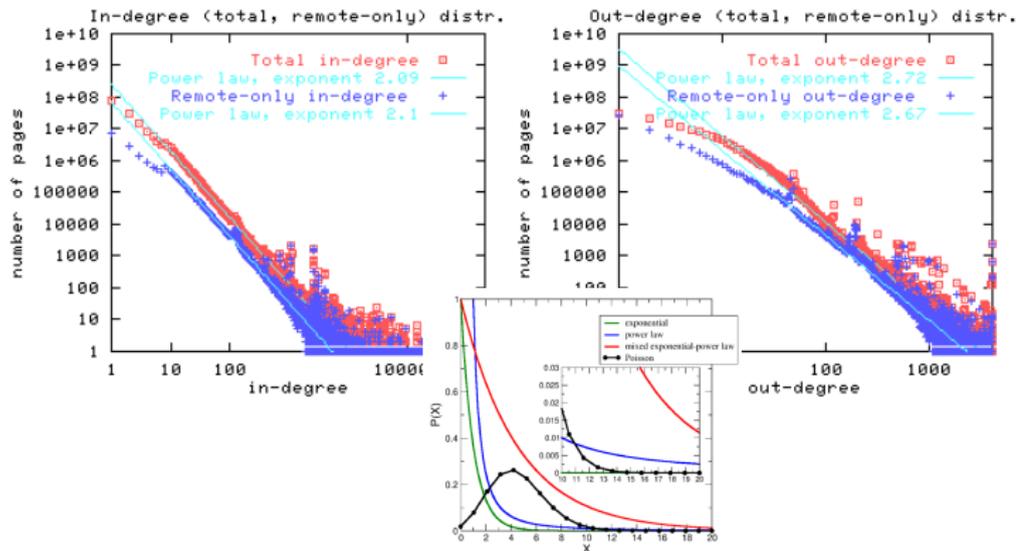
MSR-Inria Joint Centre

November 17, 2015

Power-law random graphs

Rough definition: graphs such that number X_i of degree i -nodes verifies $X_i \approx C \times i^{-\beta}$ for some exponent $\beta > 0$ over some wide range of values i

Examples: Web graph, FaceBook graph, Hollywood graph, protein interaction graph, Internet router-level graph,...



Also known as **scale-free graphs**: no natural scale for node degrees.

Contrast with E-R graphs $\mathcal{G}(n, d/n)$: for $d \gg \ln(n)$, with high probability all node degrees close to d (see Petite Classe)

Outline

- The Barabási-Albert (BA) preferential attachment model
- Power-law property of the BA random graph
- Azuma-Hoeffding concentration inequality
- Proof elements of BA's power-law property

BA preferential attachment model

Iterative construction of graphs $G_t = (\mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t)$, $t \geq 0$ from initial graph $G_0 = (\mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0)$

Step t :

- Add new node t to \mathcal{V}_{t-1} , hence $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_0 \cup \{1, \dots, t\}$, and $n_t := |\mathcal{V}_t| = n_0 + t$
- Connect node t by single edge to *anchor node* $V_t \in \mathcal{V}_{t-1}$, hence $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{t-1} \cup \{(V_t, t)\}$, and $e_t := |\mathcal{E}_t| = |\mathcal{E}_0| + t$
- Selection procedure of anchor node V_t :
$$\forall v \in \mathcal{V}_{t-1}, \mathbb{P}(V_t = v | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \frac{1}{n_{t-1}} + (1 - \alpha) \frac{D_{t-1}(v)}{2e_{t-1}},$$
where $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(V_1^{t-1})$ and $D_{t-1}(v)$: degree of node v in G_t .

Theorem

Let $X_i(t)$ = number of degree i -nodes in G_t . Let

$$c_1 = \frac{2}{3 - \alpha}, \quad \forall i > 1, \quad \frac{c_i}{c_{i-1}} = 1 - \frac{3 - \alpha}{2 + 2\alpha + (1 - \alpha)i}.$$

Then for any fixed $i \geq 1$, almost surely one has $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_i(t) = c_i$.

Corollary

The Barabási-Albert random graph model for $\alpha \in [0, 1[$ is approximately power-law with exponent $\beta = \frac{3 - \alpha}{1 - \alpha}$ in that for some constant $C > 0$, $c_i \sim C \times i^{-\beta}$ as $i \rightarrow \infty$

- Model extensions: new node creates fixed number (not necessarily one) of edges; edges can be oriented \Rightarrow possibility to induce distinct exponents β_{in}, β_{out} for node in-degree and out-degree distributions
- Precursors of BA model for explaining power-laws by preferential attachment dynamics: Yule model of evolution (Yule, 1925) of number of species in each genera (family of species)
- Alternative explanations of power-laws: Mandelbrot's argument that power laws optimize some criterion (e.g., power-law distribution of word frequencies in a language optimizes information content per symbol)

The Yule model

Species grouped in *genera*. Mutation within a species induces creation of a new species, assumed to belong to same genera with probability $1 - \alpha$ (mild mutation), or to initiate a new genera with probability α (radical mutation)

Discrete time model: at each step choose one species uniformly and add corresponding mutant species. Preferential attachment: bigger genera increase more than smaller ones.

Theorem

Let $Y_i(t)$: number of genera with i species

Let $d_1 = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, $\forall i > 1$, $\frac{d_i}{d_{i-1}} = 1 - \frac{2-\alpha}{1+i(1-\alpha)}$, $i > 1$

Then almost surely $\forall i \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_i(t)}{t} = d_i$

Hence, power-law distribution with exponent $\beta = (2 - \alpha)/(1 - \alpha)$

Proposition

For fixed $i \geq 1$ let $x_i(t) := \mathbb{E}X_i(t)$ and $\delta_i(t) := x_i(t) - c_i t$.
Then for all $\epsilon > 0$, $\delta_i(t) = o(t^\epsilon)$ as $t \rightarrow \infty$.

Evolution equations

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1(t+1) = X_1(t) | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = 1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_1(t)}{n_t} + (1 - \alpha) \frac{1 \times X_1(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_1(t+1) = X_1(t) + 1 | \mathcal{F}_t) &= 1 - \alpha \frac{X_1(t)}{n_t} - (1 - \alpha) \frac{X_1(t)}{2e_t}\end{aligned}$$

Hence $x_1(t+1) - x_1(t) = 1 - \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t} \right] x_1(t)$. This yields

$$\begin{aligned}\delta_1(t+1) - \delta_1(t) &= -c_1 + 1 - \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t} \right] (c_1 t + \delta_1(t)) \\ &= -c_1 + 1 - \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2} \right) c_1 + O(t^{-1}) \\ &\quad - \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t} \right] \delta_1(t),\end{aligned}$$

Proof elements: controlling the mean 2

Hence

$$\delta_1(t+1) = O(t^{-1}) + [1 - \frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t}] \delta_1(t) = \sum_{s=1}^t O(s^{-1}) = o(t^\epsilon)$$

Case $i > 1$: evolution equations

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i(t+1) = X_i(t) + 1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i-1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_{i-1}(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{(i-1)X_{i-1}(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_i(t+1) = X_i(t) - 1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_i(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{i X_i(t)}{2e_t}, \end{aligned}$$

hence difference $x_i(t+1) - x_i(t)$ equals

$$\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2e_t} \right] x_{i-1}(t) - \left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{i(1-\alpha)}{2e_t} \right] x_i(t)$$

Writing $x_j(t) = c_j t + \delta_j(t)$, and using induction hypothesis $\delta_{i-1}(t) = o(t^\epsilon)$ yields

$$|\delta_i(t+1)| \leq |\delta_i(t)| + O(t^{\epsilon-1}).$$

Azuma-Hoeffding inequality

Definition

A sequence $\{M_s\}_{0 \leq s \leq t}$ is a martingale with respect to an increasing sequence $\{\mathcal{F}_s\}_{0 \leq s \leq t}$ of σ -fields if for all s , M_s is \mathcal{F}_s -measurable, and $\mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_{s-1}) = M_{s-1}$.

Theorem

Let $\{M_s\}_{0 \leq s \leq t}$ be a martingale with bounded increments: there exist constants c_s such that almost surely,

$$\forall s > 0, |M_s - M_{s-1}| \leq c_s.$$

Then for all $x > 0$, $\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}\right)$.

Corollary

Under the same assumptions,

$$\mathbb{P}(|M_t - M_0| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}\right).$$

Azuma-Hoeffding inequality – Remarks

- A Gaussian-like bound on tail probabilities $\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq x)$

Corollary

Let $f : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$: measurable function. Assume there exist constants c_1, \dots, c_t such that for all $x_1^T \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_t$, all $s \in [t], y_s \in \Omega_s$,

$$|f(x_1^t) - f(x_1^{s-1}, y_s, x_{s+1}^t)| \leq c_t.$$

Then given independent random variables

$X_1, \dots, X_t \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_t$, random variable $Y := f(X_1^t)$ satisfies for all $x > 0$:

$$\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}\right)$$

Proof: Apply Azuma-Hoeffding to $M_s := \mathbb{E}[Y | X_1^s]$

Azuma-Hoeffding inequality – Proof

Write $M_t - M_{t-1} = Z \cdot c_t + (1 - Z)(-c_t)$ for some random Z .
Necessarily $Z \in [0, 1]$ and $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{t-1}) = 1/2$.

For $\theta > 0$ write

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\theta(M_t - M_{t-1}))|\mathcal{F}_{t-1}] &\leq \mathbb{E}[Ze^{\theta c_t} + (1 - Z)e^{-\theta c_t}|\mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \frac{e^{\theta c_t} + e^{-\theta c_t}}{2} \\ &\leq \exp\left(\frac{(\theta c_t)^2}{2}\right).\end{aligned}$$

This yields after iterating $\mathbb{E}[e^{\theta(M_t - M_0)}] \leq \exp\left(\frac{\theta^2}{2} \sum_{s=1}^t c_s^2\right)$

Result follows by Chernoff's argument:

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq x) \leq \exp\left(-\sup_{\theta > 0} [\theta x - \ln \mathbb{E}e^{\theta(M_t - M_0)}]\right)$$

Key Lemma

Lemma

For fixed $i, t \in \mathbb{N}$ construct from variable $X_i(t)$ in the BA graph model the martingale $M_s := \mathbb{E}[X_i(t) | \mathcal{F}_s]$ where $\mathcal{F}_s = \sigma(V_1^s)$. Then this martingale has increments bounded by 2.

Corollary

For all $i, t \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(|X_i(t) - x_i(t)| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{8t}\right)$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(|X_i(t) - x_i(t)| \geq 4\sqrt{t \ln(t)}\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

By Borel-Cantelli lemma almost surely only finitely many events $\mathcal{A}_t := \{|X_i(t) - x_i(t)| \geq 4\sqrt{t \ln(t)}\}$ occur. Thus for all $\epsilon > 0$, large enough t :

$$|X_i(t) - c_i t| \leq |\delta_i(t)| + 4\sqrt{t \ln(t)} = O(t^\epsilon) + 4\sqrt{t \ln(t)}.$$

Hence $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_i(t)}{t} = c_i$ almost surely.

Proof of key Lemma

Define function f by $X_i(t) = f(V_1^t)$ and transition kernel π_s by

$$\pi_s(v|v_1^{s-1}) = \mathbb{P}(V_s = v | V_1^{s-1} = v_1^{s-1}), \quad v \in \mathcal{V}_{s-1}$$

For fixed $s \in [t]$, and $v_u \in \mathcal{V}_{u-1}$, $u = 1, \dots, s$, construct *coupled* random sequences V_{s+1}^t, V_s^t such that:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_u = v | V_{s+1}^{u-1}) &= \pi_s(v | v_1^s, V_{s+1}^{u-1}), \quad u = s+1, \dots, t, \dots \\ \mathbb{P}(V'_u = v | V_s^{u-1}) &= \pi_s(v | v_1^{s-1}, V_s^{u-1}), \quad u = s, \dots, t, \end{aligned}$$

i.e., sequence (v_1^s, V_{s+1}^t) distributed as BA sequence conditional on first s terms $= v_1^s$;

sequence (v_1^{s-1}, V_s^t) distributed as BA sequence conditional on first $s-1$ terms $= v_1^{s-1}$, and...

Proof of key Lemma 2

... $\forall u \in \{s+1, \dots, t\}$, either $V_u = V'_u$ or $V_u, V'_u \in \{v_s, V'_s\}$.

Consequence: $|f(v_1^s, V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1}, V_s'^t)| \leq 2$.

Conditional on $V_1^s = v_1^s$, one then has:

$$|M_s - M_{s-1}| = |\mathbb{E}[f(v_1^s, V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1}, V_s'^t)]| \leq 2$$

establishing Lemma's claim.

Proof of key Lemma 3: Coupling construction

Induction hypothesis: for $u \in \{s+1, \dots, t\}$, desired construction performed up to V'_{u-1}, V_{u-1} .

Consequence: node degrees satisfy

$$D_{u-1}(v) = D'_{u-1}(v) \text{ for } v \in \mathcal{V}_{u-1} \setminus \{v_s, V'_s\} \text{ and}$$
$$D_{u-1}(v_s) + D_{u-1}(V'_s) = D'_{u-1}(v_s) + D'_{u-1}(V'_s).$$

Let for $v \in \mathcal{V}_{u-1} \setminus \{v_s, V'_s\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_u = V'_u = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) &= \frac{\alpha}{n_{u-1}} + (1 - \alpha) \frac{D_{u-1}(v)}{2e_{u-1}} \\ &= \pi_u(v | v_1^s, V_{s+1}^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^{s-1}, V_s'^{u-1}) \end{aligned}$$

and for $(v, v') \in \{v_s, V'_s\}^2$:

$$\mathbb{P}(V_u = V'_u = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \frac{\pi_u(v | v_1^s, V_{s+1}^{u-1}) \pi_u(v' | v_1^{s-1}, V_s'^{u-1})}{\pi_u(v_s | v_1^s, V_{s+1}^{u-1}) + \pi_u(V'_s | v_1^s, V_{s+1}^{u-1})}$$

Takeaway messages

- Preferential attachment dynamics induce scale-free, power-law distributions
- Examples: Barabási-Albert random graph model, Yule model of number of species per genera
- Azuma-Hoeffding inequality: Chernoff-like bound for martingales with bounded increments, an example of a *concentration inequality*
- Coupling construction instrumental in proving increment boundedness

Chapitre 14

Impact de la topologie sur les épidémies

Dans ce chapitre nous considérons un graphe $G = (V, E)$ non nécessairement complet, et analysons l'impact de la topologie du graphe sur le comportement d'épidémies s'y propageant. Nous nous intéressons en particulier au processus SIS (Susceptible - Infecté - Susceptible).

Nous énonçons tout d'abord une condition suffisante pour l'extinction rapide de l'épidémie exprimée en fonction du **rayon spectral** de la matrice d'adjacence du graphe, ainsi qu'une condition suffisante pour la survie longue de l'épidémie, exprimée en fonction de **constantes isopérimétriques** du graphe.

Ces conditions sont alors appliquées au cas des graphes complets, des hypercubes, et enfin des graphes d'Erdős-Rényi.

Nous introduisons ensuite des outils de couplage de processus de Markov, basés sur des critères pour que l'image d'un processus de Markov par une application soit à son tour un processus de Markov. Ces outils sont enfin mis en oeuvre pour prouver les résultats annoncés en début de chapitre.

14.1 Temps de survie des épidémies SIS

L'épidémie SIS sur le graphe $G = (V, E)$ est définie dans ce chapitre comme suit. C'est un processus Markovien de sauts $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\{0, 1\}^V$, où $X_i(t) = 1$ (respectivement, $X_i(t) = 0$) si au temps t le sommet $i \in V$ est infectieux (respectivement, susceptible). Ses taux de transition non nuls sont donnés par

$$q_{x, x+e_i} = \beta \mathbf{1}_{x_i=0} \sum_{j \in V} A_{ij} x_j, \quad q_{x, x-e_i} = \delta x_i,$$

où $x \in \{0, 1\}^V$, $i \in V$, A_{ij} est l'indicatrice que l'arête (i, j) est présente dans G , β est le taux d'infection le long de chaque arête et δ est le taux de rémission de chaque site. On suppose $\delta, \beta > 0$. A est aussi appelée la **matrice d'adjacence** du graphe.

Un tel processus peut être pertinent pour modéliser la propagation dans une population d'un virus mutant rapidement, de sorte qu'après une rémission, un individu est à nouveau susceptible d'être infecté par le virus qui, ayant muté, n'est pas reconnu par le système immunitaire de l'individu.

Le modèle SIS est aussi pertinent pour décrire un scénario dans lequel des machines (des capteurs par exemple) stockent une information dans une mémoire volatile, et se transmettent cette information de proche en proche. L'infection correspond alors à la réplication d'information d'une machine vers une machine voisine, tandis que la rémission correspond à l'effacement de la mémoire volatile.

L'état 0^V , où chaque sommet est susceptible, est absorbant pour ce processus. Le régime stationnaire est donc trivial. Par contraste, le temps d'atteinte de cet état absorbant est non trivial, et capture un aspect intéressant du comportement du processus: Ainsi dans le scénario de machines à mémoire volatile, il représente le temps de survie de l'information dans le système.

Définition 14.1. *Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice symétrique A est défini comme le maximum des valeurs absolues de ses valeurs propres.*

On a alors le

Théorème 14.1. *Pour un graphe fini $G = (V, E)$, $\beta, \delta > 0$, notant ρ le rayon spectral de la matrice d'adjacence A de G , et T le temps d'absorption du processus dans l'état 0^V , on a pour tout t et toute configuration initiale $x(0) \in \{0, 1\}^V$:*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(T > t) \leq \sqrt{n \sum_{i \in V} x_i(0) e^{t(\beta\rho - \delta)}} \leq n e^{t(\beta\rho - \delta)}, \quad (14.1)$$

où $n := |V|$.

Nous prouverons ce résultat en fin de chapitre. Il permet d'obtenir une condition simple sous laquelle le temps moyen d'infection est logarithmique en n :

Corollaire 14.1. *Si $\beta\rho < n$, alors*

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\delta - \beta\rho}. \quad (14.2)$$

Preuve. Ecrivant $\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t) dt$, on majore l'intégrand $\mathbb{P}(T > t)$ par 1 pour $t \leq \ln(n)/(\delta - \beta\rho)$, et par $n e^{t(\beta\rho - \delta)}$ pour $t \geq \ln(n)/(\delta - \beta\rho)$, en utilisant le théorème. Il vient

$$\mathbb{E}(T) \leq \frac{\ln(n)}{\delta - \beta\rho} + n \left[\frac{e^{t(\beta\rho - \delta)}}{\beta\rho - \delta} \right]_{\ln(n)/(\delta - \beta\rho)}^{+\infty} = \frac{\ln(n) + 1}{\delta - \beta\rho},$$

comme annoncé. □

Introduisons maintenant un second descripteur topologique:

Définition 14.2. *Etant donné un graphe $G = (V, E)$, pour tout entier $m < n$, où $n = |V|$, on définit la constante isopérimétrique associée $\eta_m(G)$ comme:*

$$\eta_m(G) = \inf_{S \subset V, |S| \leq m} \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}, \quad (14.3)$$

où \bar{S} est le complémentaire de S dans V , $E(S, \bar{S})$ est l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans \bar{S} , et $|E(S, \bar{S})|$ est le nombre de telles arêtes.

On a alors le

Théorème 14.2. *Soit un graphe $G = (V, E)$. Supposons que pour une constante $r \in]0, 1[$, et pour un entier $m < n$ on ait $\beta\eta_m \geq \delta/r$, où η_m est la constante isopérimétrique de G . Notant T le temps d'extinction du processus SIS de paramètres β, δ sur G , on a alors pour tout $k \geq 1$:*

$$\mathbb{P}(T \geq \frac{k}{2\delta m}) \geq (1-r)(1-r^{m-1})^k(1-f(k)) \quad (14.4)$$

pour une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$.

On verra dans la preuve, donnée en fin de chapitre, qu'un choix explicite pour $f(k)$ consiste en $f(k) = \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k \leq k/2)$ pour des variables aléatoires E_i i.i.d., exponentielles de paramètre 1. La convergence de f vers 0 découle donc de la loi des grands nombres: l'inégalité de Chernoff permet de plus d'établir que cette décroissance est exponentiellement rapide.

Corollaire 14.2. *Sous les hypothèses du théorème, pour $k = \lfloor r^{-m+2} \rfloor$, on a*

$$\mathbb{P}(T \geq \frac{\lfloor r^{-m+2} \rfloor}{2\delta m}) \geq (1-r)^2(1-f(k)),$$

et donc

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \frac{\lfloor r^{-m+2} \rfloor}{2m}(1-r)^2(1-f(k)).$$

Si pour une séquence de graphes G_n , une suite m_n tendant vers l'infini, et une constante fixe $r \in [0, 1[$ on a $\beta_n \eta_{m_n}(G_n) \geq \delta_n/r$, alors le temps d'extinction T_n de l'épidémie sur G_n de paramètres (β_n, δ_n) vérifie

$$\mathbb{E}(\delta_n T_n) \geq \frac{\lfloor r^{-m_n+2} \rfloor}{2m_n}(1-r)^2(1-o(1)) = e^{\Omega(m_n)}. \quad (14.5)$$

Ce dernier résultat s'interprète comme suite: sous la condition $\beta\eta_m \geq \delta/r$, le temps d'extinction est exponentiellement long en m . Cette condition est à rapprocher de la condition suffisante pour l'extinction rapide, qui s'exprimait comme $\beta\rho < \delta$: ici, on a renversé le signe de l'inégalité, et remplacé ρ par η_m .

Preuve. En appliquant le théorème 14.2 avec $k = \lfloor r^{-m+2} \rfloor$, le membre de droite de (14.4) vérifie

$$(1-r)(1-r^{m-1})^k(1-f(k)) \geq (1-r)[1-kr^{m-1}](1-f(k)),$$

où on a utilisé l'inégalité $\prod_i (1-b_i) \geq 1 - \sum_i b_i$, valide pour toute suite de valeurs $b_i \in [0, 1]$. La première inégalité du corollaire en découle puisque $kr^{m-1} \leq r^{-m+2}r^{m-1} \leq r$.

La minoration de $\mathbb{E}(\delta T)$ s'en déduit alors en écrivant

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \frac{k}{2m} \mathbb{P}(\delta T \geq \frac{k}{2m}).$$

□

14.2 Transition de phase pour des graphes particuliers

Appliquons maintenant ces conditions à des graphes particuliers.

On remarque tout d'abord que le rayon spectral de la matrice d'adjacence d'un graphe d -régulier vaut d . En effet, le rayon spectral $\rho(M)$ d'une matrice M est toujours majoré par $\max_i \sum_j |M_{ij}|$ (exercice). Pour un graphe d -régulier de matrice d'adjacence A , on a $\max_i \sum_j |A_{ij}| = \max_i d_i = d$, où on a noté d_i le degré du sommet i , et donc $\rho(A) \leq \max_i d_i = d$. Inversement, le vecteur e constitué uniquement de 1 est vecteur propre pour la valeur propre d .

Graphe complet

Le graphe complet sur n sommets est $n-1$ -régulier, donc de rayon spectral $n-1$. Par ailleurs, pour tout $m < n$, sa constante isopérimétrique η_m vaut $n-m$. On obtient ainsi le résultat suivant:

Proposition 14.1. *Soit $G = (V, E)$ le graphe complet sur n sommets. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. On note T le temps d'extinction d'une épidémie SIS sur ce graphe, de paramètres $\beta, \delta > 0$.*

Si $\beta(n-1) \leq \delta(1-\epsilon)$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\epsilon} = O(\ln(n)).$$

Si $\beta(n-1) \geq \delta(1+\epsilon)$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq e^{\Omega(n)}.$$

En effet, la majoration de $\mathbb{E}(\delta T)$ est immédiate au vu de (14.2), puisque $\delta - \beta\rho \geq \delta\epsilon$ par hypothèse.

Pour la minoration, on prend $m_n = n\epsilon/2$. On a alors $\beta\eta_m = \beta(1-\epsilon/2)n \geq (1-\epsilon/2)(1+\epsilon)\delta$ par hypothèse, soit $\beta\eta_m \geq \delta/r$ avec $r^{-1} = (1-\epsilon/2)(1+\epsilon) > 1$ pour $\epsilon \in]0, 1[$. La minoration en $e^{\Omega(n)}$ de $\mathbb{E}(\delta T)$ découle alors de (14.5).

On a donc une transition de comportement de l'épidémie lorsque le produit $\beta(n-1)/\delta$ franchit la valeur critique 1.

Hypercube

On prend ici pour $G = (V, E)$ l'hypercube à d dimensions, i.e. $n = 2^d$, $V = \{0, 1\}^d$, et deux sommets u, v sont adjacents si et seulement si leur distance de Hamming est égale à 1. Le graphe est d -régulier. Par ailleurs, un résultat de Harper [?] établit que pour $m = 2^k$, $k < d$, la constante isopérimétrique vérifie $\eta_m \geq d-k$. Ceci nous permet d'établir la

Proposition 14.2. *Soit $\epsilon \in]0, 1[$. Si $\beta d \leq (1-\epsilon)\delta$, alors*

$$\mathbb{E}(\delta T) \leq \frac{\ln(n) + 1}{\epsilon} = O(\ln(n)).$$

Si $\beta d \geq (1+\epsilon)\delta$, alors

$$\mathbb{E}(\delta T) \geq \exp(\Omega(n^{\epsilon/2})).$$

En effet, la majoration est obtenue de manière identique au cas du graphe complet (et vaut en fait pour n'importe quel graphe d -régulier, pas uniquement l'hypercube). Pour la minoration, on prend $m = 2^{d/2}$. On a alors $\beta\eta_m \geq \beta(1-\epsilon/2)d \geq \delta(1-\epsilon/2)(1+\epsilon) = \delta/r$ par hypothèse, avec $r < 1$. On obtient alors de (14.5) la minoration en $e^{\Omega(m)} = \exp(\Omega(n^{\epsilon/2}))$ de $\mathbb{E}(\delta T)$.

On a ici aussi une transition de comportement de l'épidémie lorsque $\beta d/\delta$ franchit la valeur critique 1.

Graphe d'Erdős-Rényi

Le lemme suivant va nous permettre d'appliquer les bornes générales aux graphes d'Erdős-Rényi de degré suffisamment grand:

Lemme 14.1. *Soit d une fonction de n telle que $d \gg \ln(n)$. Pour le graphe $G_n = \mathcal{G}(n, d/n)$ on a alors les convergences en probabilité, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, notant ρ_n le rayon spectral de la matrice d'adjacence de G_n :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{d} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\alpha n}(G_n)}{(1 - \alpha)d} = 1. \quad (14.6)$$

Preuve. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. Notant d_i le degré du sommet $i \in [n]$ dans G_n , celui-ci admet une loi Binomiale $\text{Bin}(n - 1, d/n)$. Soit $d' = (n - 1)d/n$ sa moyenne. D'après la borne de l'union, et le fait que les bornes de Chernoff pour une variable binomiale sont plus resserrées que les bornes correspondantes pour des variables de Poisson de même moyenne, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{i \in [n]} d_i \geq (1 + \epsilon)d) &\leq n\mathbb{P}(\text{Bin}(n - 1, d/n) \geq (1 + \epsilon)d) \\ &\leq n \exp(-d' h(d(1 + \epsilon)/d')), \end{aligned}$$

où $h(x) = x \ln(x) - x + 1$, et le dernier terme correspond à la borne de Chernoff de la probabilité $\mathbb{P}(\text{Poi}_{d'} \geq (1 + \epsilon)d)$. L'argument de h tend vers $1 + \epsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et comme $d' \sim n \gg \ln(n)$, l'exponentielle tend vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance négative de n , donc le membre de droite ci-dessus tend vers 0. Pareillement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\inf_{i \in [n]} d_i \leq (1 - \epsilon)d) &\leq n\mathbb{P}(\text{Bin}(n - 1, d/n) \leq (1 - \epsilon)d) \\ &\leq n \exp(-d' h(d(1 - \epsilon)/d')), \end{aligned}$$

et ce dernier membre tend vers 0, d'après le même argument.

Lorsque $\sup_i d_i \leq d(1 + \epsilon)$, la matrice d'adjacence A_n des G_n a toutes ses valeurs propres de module inférieur ou égal à $d(1 + \epsilon)$, soit $\rho_n \leq d(1 + \epsilon)$ d'après la majoration du rayon spectral par le maximum sur chaque ligne de la somme des valeurs absolues des entrées correspondantes.

Pour une matrice M et un scalaire $a > 0$, on a $a > \rho(M)$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} (a^{-1}M)^k = 0$: cela est immédiat pour une matrice diagonalisable, mais s'applique aussi au cas non diagonalisable en considérant la forme normale de Jordan de la matrice.

Lorsque $\inf_{i \in [n]} d_i \geq d(1 - \epsilon)$, en choisissant $a = (1 - \epsilon)d$, le vecteur $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$(a^{-1}A_n)e \geq e.$$

Donc nécessairement $a = d(1 - \epsilon) \leq \rho(A_n) = \rho_n$. Cela établit la convergence en probabilité $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n/d = 1$.

Pour la constante isopérimétrique $\eta := \eta_{\alpha n}(G_n)$, écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 + \epsilon)(1 - \alpha)d) &\geq \mathbb{P}\left(\frac{|E([n\alpha], \overline{[n\alpha]})|}{n\alpha} \leq (1 + \epsilon)(1 - \alpha)d\right) \\ &= \mathbb{P}(\text{Bin}(n\alpha(n(1 - \alpha)), d/n) \leq n\alpha(1 + \epsilon)(1 - \alpha)d). \end{aligned}$$

Cette dernière probabilité tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, par exemple d'après l'inégalité de Chernoff. Inversement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} \binom{n}{k} \mathbb{P}\left(\frac{|E([k], \overline{[k]})|}{k} \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n\alpha} \binom{n}{k} \mathbb{P}(\text{Bin}(k(n - k), d/n) \leq k(1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} n^k e^{-b_k h(a_k/b_k)} \end{aligned}$$

à nouveau d'après la borne de l'union et l'inégalité de Chernoff, où on a noté $a_k = k(1 - \epsilon)(1 - \alpha)d$, et $b_k = k(n - k)d/n$. Le ratio a_k/b_k est majoré par $1 - \epsilon$, et b_k est minoré par $kd(1 - \alpha)$, pour $k \leq \alpha n$. Il vient donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta \leq (1 - \epsilon)(1 - \alpha)d) &\leq \sum_{k=1}^{n\alpha} n^k e^{-kd(1 - \alpha)h(1 - \epsilon)} \\ &\leq \frac{1}{1 - ne^{-d(1 - \alpha)h(1 - \epsilon)}} - 1. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, d'après l'hypothèse $d \gg \ln(n)$ et le fait que $(1 - \alpha)h(1 - \epsilon) > 0$. \square

On obtient en corollaire la proposition suivante:

Proposition 14.3. *Soit d une fonction de n telle que $d \gg \ln(n)$ et soit $G_n = \mathcal{G}(n, d/n)$. Pour un $\epsilon > 0$ fixé, si $\beta d \leq (1 - \epsilon)\delta$, avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, le graphe G_n est tel que le temps d'extinction T_n de l'épidémie SIS sur G_n de paramètres β, δ vérifie $\mathbb{E}(\delta T_n) = O(\ln(n))$.*

Inversement, si $\beta d \geq (1 + \epsilon)\delta$, avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, le graphe G_n est tel que $\mathbb{E}(\delta T_n) \geq e^{\Omega(n)}$.

14.3 Images Markoviennes de processus de Markov

Nous traitons d'abord le cas des chaînes de Markov pour motiver le résultat sur les processus Markoviens de saut.

Chaînes de Markov

Théorème 14.3. *Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur l'espace dénombrable E , de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction de E dans un autre espace dénombrable F . On suppose qu'il existe une matrice de transition \hat{P} sur F telle que, pour tout $i \in E$, et tout $y \in F$, on ait*

$$\sum_{j \in E: f(j)=y} p_{ij} = \hat{p}_{f(i),y}. \quad (14.7)$$

Alors le processus à temps discret sur F défini par $Y_n = f(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est une chaîne de Markov de matrice de transition \hat{P} .

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $y_0^n \in F^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_0^n = y_0^n) &= \sum_{x_0^n \in E^{n+1}: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) \\ &= \sum_{x_0^n \in E^{n+1}: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i, x_{i+1}} \\ &= \sum_{x_0^{n-1} \in E^n: \forall i, f(x_i) = y_i} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=0}^{n-2} p_{x_i, x_{i+1}} \hat{p}_{f(x_{n-1}), y_n} \\ &= \mathbb{P}(Y_0^{n-1} = y_0^{n-1}) \hat{p}_{y_{n-1}, y_n}, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse. Le résultat annoncé en découle. \square

Remarque 14.1. *En général, l'image d'une chaîne de Markov n'est pas Markovienne. Pour s'en convaincre on peut considérer la chaîne de Markov déterministe sur $\{0, 1, 2\}$ donnée par $X_{n+1} = X_n + 1 \pmod{3}$ et la fonction $f(x) = \mathbf{1}_{x=2}$. Pour $X_0^n = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots\}$, le processus image est $Y_0^n = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\}$ qui n'est pas Markovien.*

Processus de saut

Théorème 14.4. *Soit $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus Markovien de sauts sur l'espace dénombrable E , de générateur infinitésimal $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction de E dans un autre espace dénombrable F . On suppose qu'il existe un générateur infinitésimal \hat{Q} sur F tel que, pour tout $i \in E$, et tout $y \in F$ tel que $f(i) \neq y$, on ait*

$$\sum_{j \in E: j \neq i, f(j)=y} q_{ij} = \hat{q}_{f(i),y}. \quad (14.8)$$

Alors le processus à temps continu sur F défini par $Y(t) = f(X(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, est un processus Markovien de sauts de générateur infinitésimal \hat{Q} .

Preuve. On note $\{X_n, \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement, $\{Y_n, \hat{\tau}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) la suite des états visités et des temps de séjour correspondants par le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ (respectivement, $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$). On fixe $\alpha > 0$, $y_0, y_1 \in F$ tels que $y_0 \neq y_1$. On définit alors la fonction g sur $f^{-1}(y_0)$ en posant pour tout $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y_0$:

$$g(x_0) := \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \hat{\tau}_0} \mathbf{1}_{Y_1=y_1} \mid X_0 = x_0 \right].$$

Dans un premier temps nous prouvons que

$$\forall x_0 \in f^{-1}(y_0), \quad g(x_0) = g^0(x_0) \equiv \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{\hat{q}(y_0) + \alpha}, \quad (14.9)$$

où on a noté $\hat{q}(y_0) = -\hat{q}_{y_0, y_0} = \sum_{y \neq y_0} \hat{q}_{y_0, y}$.

Pour évaluer g on conditionne par rapport au nombre $n \geq 1$ de sauts du processus $X(t)$ jusqu'à l'instant $\hat{\tau}_0$ inclus, et par rapport à la séquence x_1^n d'états visités lors de ces sauts. Nécessairement, la séquence x_1^{n-1} est à valeurs dans $f^{-1}(y_0)$, et telle que deux valeurs consécutives de x_0^{n-1} sont toutes distinctes. Notons $E_{n-1}(x_0)$ l'ensemble de telles séquences. On a donc

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1^{n-1} \in E_{n-1}(x_0), x_n \in f^{-1}(y_1)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=x_i} e^{-\alpha \tau_{i-1}} \mid X_0 = x_0 \right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{x_1^{n-1} \in E_{n-1}(x_0), x_n \in f^{-1}(y_1)} \prod_{i=1}^n \frac{q_{x_{i-1}, x_i}}{q(x_{i-1}) + \alpha} \\ &= h(x_0) + \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_0), x_1 \neq x_0} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha} g(x_1), \end{aligned}$$

où on a utilisé les notations $q(x_0) = -q_{x_0, x_0} = \sum_{x \neq x_0} q_{x_0, x}$, et on a introduit la fonction

$$h(x_0) := \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha}.$$

On note l'équation précédente

$$g = h + \mathcal{L}g, \quad (14.10)$$

où \mathcal{L} est l'opération linéaire spécifiée par

$$(\mathcal{L}g)(x_0) := \sum_{x_1 \in f^{-1}(y_0), x_1 \neq x_0} \frac{q_{x_0, x_1}}{q(x_0) + \alpha} g(x_1), \quad x_0 \in f^{-1}(y_0).$$

Montrons que l'équation (14.10) admet pour solution la fonction constante g^0 définie en (14.9).

En introduisant la notation $q'(x_0) := \sum_{x \neq x_0, x \in f^{-1}(y_0)} q_{x_0, x}$, on a pour tout $x_0 \in f^{-1}(y_0)$:

$$q(x_0) = q'(x_0) + \hat{q}(y_0),$$

d'après l'hypothèse du théorème. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} h(x_0) + \mathcal{L}g^0(x_0) &= \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{q(x_0) + \alpha} + \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{\hat{q}(y_0) + \alpha} \frac{q'(x_0)}{q(x_0) + \alpha} \\ &= \frac{\hat{q}_{y_0, y_1}}{q(x_0) + \alpha} \left[\frac{\hat{q}(y_0) + \alpha + q'(x_0)}{\hat{q}(y_0) + \alpha} \right] \\ &= g^0, \end{aligned}$$

comme annoncé.

Montrons maintenant que g^0 est l'unique solution bornée de (14.10). Pour cela, nous utilisons l'identité suivante, aisément établie par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}^n g(x_0) = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} g(X_n) | X_0 = x_0].$$

Alors, pour deux solutions bornées g, g^0 de (14.10), il vient pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in f^{-1}(y_0)$:

$$g(x) - g^0(x) = \mathcal{L}^n g(x) - \mathcal{L}^n g^0(x) = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} [g(X_n) - g^0(X_n)] | X_0 = x_0].$$

Le terme $e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})}$ tend vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers $+\infty$ d'après la caractéristique non-explosif du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. La variable aléatoire $e^{-\alpha(\tau_0 + \dots + \tau_{n-1})} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{f(X_i)=y_0} [g(X_n) - g^0(X_n)]$ est bornée en valeur absolue d'après l'hypothèse g, g^0 bornées. Le théorème de convergence dominée implique alors que $g \equiv g^0$.

Soit maintenant $n \geq 1$, $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} > 0$, $y_0^n \in F^n$ tels que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, $y_i \neq y_{i+1}$. La propriété de Markov forte du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ appliquée au temps d'arrêt $\hat{T}_{n-1} := \hat{\tau}_0 + \dots + \hat{\tau}_{n-2}$ combinée avec (14.9) donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] &= \sum_{x \in f^{-1}(y_{n-1})} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \mathbf{1}_{X(\hat{T}_{n-1})=x} e^{-\alpha_{n-1} \hat{\tau}_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y_{n-1})} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X(\hat{T}_{n-1})=x} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \frac{\hat{q}_{y_{n-1}, y_n}}{\hat{q}(y_{n-1}) + \alpha_{n-1}} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_{n-1}=y_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-2} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] \frac{\hat{q}_{y_{n-1}, y_n}}{\hat{q}(y_{n-1}) + \alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

En itérant cette formule, on obtient

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n=y_n} \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha_i \hat{\tau}_i} \mathbf{1}_{Y_i=y_i}] = \mathbb{P}(Y_0 = y_0) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\hat{q}_{y_i, y_{i+1}}}{\hat{q}(y_i) + \alpha_i}.$$

Le processus $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est non-explosif car l'ensemble de ses sauts est un sous-ensemble de ceux de $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, lui-même non-explosif. Il admet donc la loi annoncée. \square

14.4 Couplage de processus Markoviens de saut

Nous donnons tout d'abord un résultat général dont nous déduirons le résultat du théorème 14.1. Nous établissons ensuite le théorème 14.2.

Définition 14.3. *Un processus de vie et mort généralisé est un processus Markovien de sauts sur \mathbb{N}^k , pour un $k \in \mathbb{N}$, dont les seuls taux de transition non nuls consistent en un changement de $+1$ ou -1 sur une seule coordonnée. On les note, pour $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in [k]$, $q_{x, x+e_i} = \beta_i(x)$ (le taux de naissance au site i dans l'état x), et $q_{x, x-e_i} = \delta_i(x)$ (le taux de mort au site i dans l'état x).*

On a alors le

Théorème 14.5. *Soient X, X' deux processus de vie et mort généralisés sur \mathbb{N}^k , supposés non-explosifs, de fonctions taux de naissance et mort respectives (β, δ) et (β', δ') . On suppose que pour tous $x, x' \in \mathbb{N}^k$ tels que $x \leq x'$, on a*

$$\forall i \in [k], x_i = x'_i \Rightarrow \beta_i(x) \leq \beta'_i(x), \delta_i(x) \geq \delta'_i(x).$$

Alors pour deux conditions initiales $x(0), x'(0)$ si $x(0) \leq x'(0)$, il existe une construction couplée des processus X, X' issus de ces conditions initiales telle que avec probabilité 1,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, X(t) \leq X'(t).$$

Preuve. Considérons un processus de Markov sur l'espace $E := \{(x, x') \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k : x \leq x'\}$ de condition initiale $(x(0), x'(0))$, et de taux de transition non nuls donnés, pour tout $(x, x') \in E$ et tout $i \in [k]$ par

$$\begin{aligned} x_i < x'_i &\Rightarrow q_{(x,x'),(x+e_i,x')} = \beta_i(x), q_{(x,x'),(x-e_i,x')} = \delta_i(x), \\ & q_{(x,x'),(x,x'+e_i)} = \beta'_i(x'), q_{(x,x'),(x,x'-e_i)} = \delta'_i(x'), \\ x_i = x'_i &\Rightarrow q_{(x,x'),(x+e_i,x'+e_i)} = \beta_i(x) \\ & q_{(x,x'),(x,x'+e_i)} = \beta'_i(x') - \beta_i(x), \\ & q_{(x,x'),(x-e_i,x'-e_i)} = \delta'_i(x'), \\ & q_{(x,x'),(x-e_i,x')} = \delta_i(x) - \delta'_i(x'). \end{aligned} \tag{14.11}$$

D'après les hypothèses sur les fonction $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$, les taux ainsi définis sont bien non-négatifs. Supposons d'abord que le processus correspondant est non-explosif. Prenant pour tout $(x, x') \in E$, $f(x, x') = x$, vérifions que le théorème 14.4 s'applique.

Ce sera le cas si pour tout $(x, x') \in \mathbb{N}^k$, tout $i \in [k]$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{y':(x+e_i,y') \in E} q_{(x,x'),(x+e_i,y')} &= \beta_i(x), \\ \sum_{y':(x-e_i,y') \in E} q_{(x,x'),(x-e_i,y')} &= \delta_i(x). \end{aligned}$$

Chacune de ces identités est trivialement vérifiée si $x' > x$, la somme se réduisant à l'unique terme pour $y' = x'$. Dans le cas $x_i = x'_i$, la première identité se vérifie aussi directement, la somme se réduisant à l'unique terme $y' = x' + e_i$. La seconde identité implique la somme des deux termes $y' = x'$ et $y' = x' - e_i$, et donne:

$$\delta'_i(x') + \delta_i(x) - \delta'_i(x') = \delta_i(x),$$

qui est bien vérifiée. La première composante sur \mathbb{N}^k du processus $(X(t), X'(t))$ est donc bien un processus de vie et mort généralisé de fonctions associées (β, δ) . On vérifie de manière semblable que la deuxième composante X' est un processus de vie et mort généralisé de fonctions associées (β', δ') .

Pour établir que le processus ci-dessus est non-explosif, on peut procéder comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ une borne sur le nombre de sauts de chaque composante x, x' . On étend l'espace d'états à (x, n, x', n') , n (resp. n') comptant le nombre de sauts de la composante x (resp. x').

On considère le processus Markovien de sauts sur $(\mathbb{N}^k \times \{0, \dots, N\})^2$ dont les taux de transition sont spécifiés comme suit. Si $x \leq x'$ et $n, n' < N$, alors le taux de transition de (x, n, x', n') vers (y, m, y', m') est égal à $q_{(x,x'),(y,y')}$ si $m = n + \mathbf{1}_{y \neq x}$ et $m' = n' + \mathbf{1}_{y' \neq x'}$, où q est défini en (14.11), et à zéro sinon. Dans tous les autres cas, les seuls taux de transition non nuls sont donnés par

$$\begin{aligned} (x, n, x', n') \rightarrow (y, n+1, x', n') &: \mathbf{1}_{n < N} \{ \beta_i(x) \mathbf{1}_{y=x+e_i} + \delta_i(x) \mathbf{1}_{y=x-e_i} \}, \\ (x, n, x', n') \rightarrow (x, n, y', n'+1) &: \mathbf{1}_{n' < N} \{ \beta'_i(x') \mathbf{1}_{y'=x'+e_i} + \delta'_i(x') \mathbf{1}_{y'=x'-e_i} \}. \end{aligned}$$

Le processus est alors clairement non-explosif: partant de la condition initiale $(x(0), 0, x'(0), 0)$, on aura au plus $2N$ sauts avant arrêt des transitions en un état absorbant (x, N, x', N) . Le théorème 14.4 s'applique alors. Il implique que la composante (x, n) est un processus Markovien de sauts avec pour x un processus de vie et mort généralisé (β, δ) , et n comptant ses transitions,

jusqu'à arrêt au bout de N transitions, et pareillement pour la composante (x', n') . Par ailleurs l'hypothèse de non-explosivité de X et X' entraîne que presque sûrement, $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N, T'_N = +\infty$, où T_N (resp., T'_N) désigne le temps d'atteinte de N par la composante n (resp. n').

Enfin, on voit aisément, d'après la structure des processus Markoviens de saut, que cette construction jointe au rang N coïncide en loi, sur l'intervalle $T_N \wedge T'_N$, premier instant de N -ème saut d'une des deux composantes x, x' , avec le processus de taux (14.11). Ce dernier est donc non-explosif. \square

Preuve du théorème 14.1

Considérons $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, le processus SIS de paramètres $\beta, \delta > 0$ sur un graphe $G = (V, E)$, comme un processus de vie et mort généralisé sur \mathbb{N}^n avec $n = |V|$. On prend comme fonctions de taux de naissance associées $\beta_i(x) = \mathbf{1}_{x_i=0} \sum_{j \sim i} x_j$ où $i \sim j$ indique que l'arc (i, j) est présent dans G , et comme fonction de taux de mort $\delta_i(x) = \delta x_i$. On introduit maintenant le processus $\{X'(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ dit de *marche aléatoire branchante* qui est par définition un processus de vie et mort généralisé sur \mathbb{N}^n de fonctions de taux $\beta'_i(x') = \sum_{j \sim i} x'_j$ et $\delta'_i(x') = \delta x'_i$.

Le processus X est clairement non-explosif puisque, partant d'une condition initiale $x(0)$, il ne quitte pas l'ensemble fini $\{0, \dots, \sup_i x_i(0)\}^n$. Admettons pour l'instant que le processus X' est lui aussi non-explosif. La condition de comparaison des taux du théorème 14.5 est bien vérifiée: pour $x \leq x'$, et i tel que $x_i = x'_i$, on a $\delta_i(x) = \delta'_i(x') = \delta x_i$, et $\beta_i(x) \leq \beta \sum_{j \sim i} x'_j = \beta'_i(x')$.

Il existe alors un couplage (X, X') pour lequel les deux composantes ont même condition initiale $x(0) \in \{0, 1\}^n$ et avec probabilité 1, $X(t) \leq X'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cela implique la majoration suivante, notant T le temps d'absorption en 0 du processus X :

$$\mathbb{P}(T > t) \leq \mathbb{E} \sum_{i \in V} X_i(t) \leq \mathbb{E} \sum_{i \in V} X'_i(t).$$

En effet, la première inégalité vient de la borne de l'union, et de ce que $\mathbb{P}(X_i(t) > 0) \leq \mathbb{E}(X_i(t))$, et la deuxième inégalité se déduit du résultat de couplage: si $X_i(t) \leq X'_i(t)$ presque sûrement, alors les espérances sont ordonnées pareillement.

Nous établissons maintenant le résultat suivant:

Lemme 14.2. *Le processus X' de marche aléatoire branchante défini ci-dessus est non-explosif, et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\mathbb{E}(X'(t)) = e^{t(\beta A - \delta I)} x(0), \quad (14.12)$$

où A désigne la matrice d'adjacence de G , I la matrice identité de taille n , et $x(0) \in \mathbb{N}^n$ la condition initiale du processus.

Avant de prouver le lemme, montrons qu'il permet de conclure la preuve du théorème 14.1. En effet, soit $\{u_i\}_{i \in V}$ une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique A , et soient λ_i les valeurs propres réelles associées. De (14.12) il vient, notant $e = (1, \dots, 1)^T$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{i \in V} X'_i(t) &= \langle e, e^{t(\beta A - \delta I)} x(0) \rangle \\ &= \sum_{i \in V} \langle e, e^{t(\beta \lambda_i - \delta)} u_i u_i^T x(0) \rangle \\ &= \sum_{i \in V} e^{t(\beta \lambda_i - \delta)} \langle e, u_i \rangle \langle u_i, x(0) \rangle \\ &\leq e^{t(\beta \rho - \delta)} \sum_{i \in V} |\langle e, u_i \rangle| |\langle u_i, x(0) \rangle| \\ &\leq e^{t(\beta \rho - \delta)} \|e\| \|x(0)\|, \end{aligned}$$

où on a majoré chacune des valeurs propres $e^{t(\beta \lambda_i - \delta)}$ de la matrice $e^{t(\beta A - \delta I)}$ par $e^{t(\beta \rho - \delta)}$ et utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la dernière ligne. Le résultat du théorème 14.1 en découle, le produit des normes étant $\sqrt{n \sum_{i \in V} x_i(0)}$ pour $x(0) \in \{0, 1\}^V$.

Preuve. (du lemme 14.2). Pour une condition initiale $X'(0) = x'$, notant $|x'|_1 = \sum_{i \in V} |x'_i|$, au bout de k sauts, la somme des composantes de l'état y ainsi atteint est au plus $|x'|_1 + k$. La somme des taux de transition est donc majorée par $(\delta + n\beta)[|x'|_1 + k] = c(|x'|_1 + k)$ pour une constante $c = \delta + n\beta > 0$. Le temps T_k de k -ème saut est donc minoré par

$$\sum_{\ell=|x'|_1}^k \frac{1}{c\ell} E_\ell,$$

où les E_ℓ sont des variables aléatoires i.i.d. exponentielles de paramètre 1.

Pour un $t > 0$ fixé, soit $N_t = |x'|_1 + \sup\{k > 0 : \sum_{\ell=|x'|_1}^k \frac{1}{c\ell} E_\ell \leq t\}$. Nous montrons maintenant que pour tout $t > 0$, $\mathbb{E}N_t < +\infty$. Ceci entraînera a fortiori le caractère non-explosif du processus. En effet, le nombre de sauts du processus sur $[0, t]$ est majoré par N_t ; notant $T_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$, sur l'événement $\{T_\infty \leq t\}$ on a $N_t = +\infty$, et donc

$$\mathbb{P}(T_\infty \leq t) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}N_t = +\infty.$$

Ainsi, la finitude de $\mathbb{E}N_t$ pour tout t entraîne $\mathbb{P}(T_\infty \leq t) = 0$ pour tout t , i.e. le processus est non-explosif.

Pour un $n \in \mathbb{N} > 0$ fixé, le processus $\{N_t \wedge n\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est par construction Markovien de sauts, à valeurs dans $[n]$, de taux non nuls de transition $q_{x, x+1} = cx \mathbf{1}_{x < n}$, et de condition initiale $|x|_1$. On a donc pour tout $k \in [n]$:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(N_{t+h} \wedge n = N_t \wedge n | N_t \wedge n = k) &= \mathbb{P}(N_{t+h} \wedge n = N_t \wedge n + 1 | N_t \wedge n = k) + o(h) \\ &= hck \mathbf{1}_{k < n} + o(h). \end{aligned}$$

L'équation de Kolmogorov nous donne ainsi (le fait que l'espace d'états est fini nous permet d'invertir somme et dérivation):

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(N_t \wedge n) = c \mathbb{E}[N_t \mathbf{1}_{N_t < n}] \leq c \mathbb{E}(N_t \wedge n).$$

Le lemme de Gronwall 2.3 et la condition initiale $N_0 = |x'|_1$ nous donnent alors $\mathbb{E}(N_t \wedge n) \leq |x'|_1 e^{ct}$. Cette majoration étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par convergence monotone que $\mathbb{E}(N_t) \leq |x'|_1 e^{ct}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour établir (14.12), on écrit pour tout $x' \in \mathbb{N}^V$, $i \in V$:

$$X'_i(t+h) - X'_i(t) = (X'_i(T_1) - X'_i(t)) \mathbf{1}_{T_1 \leq t+h} + (X'_i(t+h) - X'_i(T_1)) \mathbf{1}_{T_1 \leq t+h},$$

où T_1 désigne le premier saut du processus après t . On majore la valeur absolue $|X'_i(t+h) - X'_i(T_1)|$ par la valeur $N'(h)$ du processus Markovien de sauts précédemment considéré, de condition initiale $N'(0) = |X'(t)|_1 + 1$. On obtient ainsi:

$$\mathbb{E}[X'_i(t+h) - X'_i(t) | X'(t)] = h \left[\sum_{j \sim i} \beta X'_j(t) - \delta X'_i(t) \right] + O(h^2 |X'(t)|_1) + O(h(|X'(t)|_1 + 1)(e^{ch} - 1)),$$

les constantes implicites dans les $O(\cdot)$ étant uniformes en t, x' .

Ceci entraîne, d'après les bornes précédentes en $|x'|_1 e^{ct}$ sur $\mathbb{E}|X'(t)|_1$:

$$\mathbb{E}(X'_i(t+h)) - \mathbb{E}(X'_i(t)) = h \left[\sum_{j \sim i} \beta X'_j(t) - \delta X'_i(t) \right] + O(h^2).$$

Il en découle:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}X'(t) = [\beta A - \delta I] \mathbb{E}X'(t).$$

L'unique solution de cette équation différentielle est donnée par (14.12), d'où le résultat. \square

Preuve du théorème 14.2

On suppose l'existence de $m < n$ et $r \in]0, 1[$ tels que $\beta\eta_m \geq \delta/r$. Soit Z le processus de sauts sur $\{0, \dots, m\}$ de taux de transition non nuls:

$$\forall z \in \{0, \dots, m\}, q_{z,z+1} = \frac{\delta z}{r} \mathbf{1}_{z < m}, q_{z,z-1} = \delta z.$$

Considérons alors le processus Markovien de sauts (X, Z) sur l'espace $E := \{(x, z) \in \{0, 1\}^V \times \{0, \dots, m\}, \sum_{i \in V} x_i \geq z\}$ défini par les taux de transition non nuls, pour $(x, z) \in E$ et tout $i \in V$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V} x_j > z &\Rightarrow q_{(x,z),(x+e_i,z)} = \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, q_{(x,z),(x-e_i,z)} = \delta x_i, \\ &q_{(x,z),(x,z+1)} = \frac{\delta z}{r} \mathbf{1}_{z < m}, q_{(x,z),(x,z-1)} = \delta z, \\ \sum_{j \in V} x_j = z &\Rightarrow q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} = a(x) \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ &q_{(x,z),(x+e_i,z)} = [1-a(x)] \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ &q_{(x,z),(x-e_i,z)} = x_i \delta, \end{aligned}$$

où on a introduit $a(x) := \mathbf{1}_{\sum_j x_j < m} \frac{\delta(\sum_{j \in V} x_j)}{r \sum_{i \in V} \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j}$.

Vérifions qu'il s'agit d'un couplage du processus SIS et du processus Z précédemment introduit. Tout d'abord, les taux ainsi définis sont non négatifs: en effet, notant pour un x fixé $S = \{i : x_i = 1\}$, $a(x)$ s'écrit

$$a(x) = \frac{\delta(\sum_{j \in V} |S|)}{r \sum_{i \in V} \beta |E(S, \bar{S})|},$$

et est par définition de η_m , puisque $|S| \leq m$ sous l'hypothèse $z = \sum_{i \in V} x_i$, majoré par $\delta/(r\beta\eta_m)$. Donc $a(x) \leq 1$, et la non-négativité des taux ci-dessus en découle.

Le processus ainsi construit a un espace d'état fini, et est donc non-explosif. Vérifions maintenant la dernière condition du théorème 14.4. Pour tout $(x, z) \in E$ tel que $z < \sum_{i \in V} x_i$, la vérification est triviale. Lorsque $z = \sum_{i \in V} x_i$, on vérifie directement les identités

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} &= \delta z/r, \\ \sum_{i \in V} q_{(x,z),(x-e_i,z-1)} &= \delta z, \\ q_{(x,z),(x+e_i,z)} + q_{(x,z),(x+e_i,z+1)} &= \beta(1-x_i) \sum_{j \sim i} x_j, \\ q_{(x,z),(x-e_i,z-1)} &= \delta x_i, \end{aligned}$$

établissant ainsi qu'il s'agit bien d'un couplage des deux processus considérés.

On borne alors la probabilité de survie du processus SIS au-delà d'un instant t en écrivant $\mathbb{P}(T > t) \geq \mathbb{P}(Z(t) > 0)$. L'analyse de $Z(t)$ procède alors comme suit. La chaîne à temps discret Z_n des états successifs visités par $Z(t)$ a pour probabilités de transition non nulles $p_{z,z+1} = \mathbf{1}_{z < m} 1/(1+r)$, $p_{z,z-1} = r/(1+r)$, et est absorbée en 0.

Notant $\pi(z)$ la probabilité que la chaîne $\{Z_n\}$ visite l'état m avant d'être absorbée, conditionnellement à son état initial $Z_0 = z$, on peut établir (exercice) que

$$\pi(z) = \frac{1-r^z}{1-r^m}.$$

La probabilité qu'il y ait au moins k visites distinctes à l'état m par $Z(t)$ avant absorption en 0, conditionnellement en $Z(0) > 0$, est alors minorée par

$$\frac{1-r}{1-r^m} \left(\frac{1-r^{m-1}}{1-r^m} \right)^{k-1}.$$

En effet, après chaque visite à m le prochain état visité est $m - 1$, d'où l'expression ci-dessus.

Puisque chaque temps de séjour en m a une durée exponentielle de paramètre δ/m , on obtient la minoration

$$\mathbb{P}(T > \frac{k}{2\delta m}) \geq \frac{1-r}{1-r^m} \left(\frac{1-r^{m-1}}{1-r^m} \right)^{k-1} \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k \geq k/2),$$

où les E_i sont i.i.d. de loi Exponentielle de paramètre 1. La minoration

$$\mathbb{P}(T > \frac{k}{2\delta m}) \geq (1-r)(1-r^{m-1})^{k-1}(1-f(k)),$$

où $f(k) := \mathbb{P}(E_1 + \dots + E_k < k/2)$ en découle. La propriété $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$ se déduit de la loi des grands nombres.

Chapitre 15

Graphes en loi de puissance

De nombreux exemples de grands graphes étudiés dans des domaines très divers sont tels que le nombre X_i de leurs sommets de degré $i \in \mathbb{N}$ varie en *loi de puissance*, i.e. $X_i \approx C \times i^{-\beta}$ pour un exposant $\beta > 0$, pour une large plage de valeurs de i . Citons comme exemples: le graphe représentant les routeurs de l'Internet et les liens de communication les reliant, le graphe du Web, le graphe d'amitié de FaceBook, le graphe des protéines de la biochimie cellulaire, connectées entre elles si impliquées dans une même réaction chimique, le graphe de Hollywood reliant entre les acteurs ayant joué dans un même film...

De tels graphes sont dits en *loi de puissance*, ou encore *sans échelle*, car il n'y a pas un ordre de grandeur bien défini représentatif de la majorité des degrés des noeuds, ceux-ci variant largement dans une grande plage de valeurs $\beta \in \mathbb{N}$.

Cette propriété n'est pas présente dans les graphes d'Erdős-Rényi: en effet dans $\mathcal{G}(n, d/n)$ pour $n \gg \ln(n)$, comme vu au chapitre précédent avec forte probabilité le degré d_u de chaque sommet u est proche de d .

Dans ce chapitre nous présentons un modèle alternatif de graphe aléatoire, dû à Barabási et Albert, et prouvons que ce graphe, dit de Barabási-Albert, est en loi de puissance. Sa construction procède de manière séquentielle, selon un principe dit d'attachement préférentiel (un nouveau sommet est plus susceptible de se connecter à des sommets de degré déjà élevé, augmentant ainsi leur degré).

L'analyse correspondante nous conduit à introduire l'inégalité d'Azuma-Hoeffding. Celle-ci est un exemple d'inégalité de concentration, fournissant des bornes sur la probabilité de déviation d'une variable par rapport à sa moyenne. Cette inégalité d'Azuma-Hoeffding est similaire à l'inégalité de Chernoff, mais s'applique au-delà du cadre de sommes de variables i.i.d..

15.1 Le modèle de Barabási-Albert

Partant d'un graphe initial $G_0 = (\mathcal{V}_0, \mathcal{E}_0)$, on construit une suite de graphes $G_t = (\mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t)$ pour $t \in \mathbb{N}$ comme suit. A l'étape $t \geq 1$, un nouveau sommet, noté t , est ajouté à l'ensemble \mathcal{V}_{t-1} . Le sommet t est connecté par l'unique arête (t, V_t) , où $V_t \in \mathcal{V}_{t-1}$ est appelé *point d'ancrage* de t , à \mathcal{V}_{t-1} . Le graphe G_t est alors défini par $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_{t-1} \cup \{t\} = \mathcal{V}_0 \cup [t]$, et $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{t-1} \cup \{(t, V_t)\}$.

On note de plus $n_t = |\mathcal{V}_t| = n_0 + t$, $e_t = |\mathcal{E}_t| = e_0 + t$. Le modèle est alors spécifié par le choix probabiliste de chaque V_t . Soit $\alpha \in [0, 1]$. On pose alors, notant $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(V_1^{t-1})$:

$$\forall v \in \mathcal{V}_{t-1}, \mathbb{P}(V_t = v | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \frac{1}{n_{t-1}} + (1 - \alpha) \frac{D_{t-1}(v)}{2e_{t-1}}, \quad (15.1)$$

où $D_{t-1}(v)$ est défini comme le degré du sommet v dans le graphe G_{t-1} . Vérifions qu'on a bien une loi de probabilité sur \mathcal{V}_{t-1} : sommant sur $v \in \mathcal{V}_{t-1}$, on obtient

$$\alpha + (1 - \alpha) \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}_{t-1}} D_{t-1}(v)}{2e_{t-1}}.$$

La somme des degrés des sommets d'un graphe vaut deux fois le nombre d'arêtes. L'expression précédente vaut donc bien 1. On notera $\pi_t(v|V_1^{t-1})$ le membre de droite de (15.1). Ainsi pour tout $v_1^{t-1} \in \mathcal{V}_0 \times \cdots \times \mathcal{V}_{t-2}$, et tout $v \in \mathcal{V}_{t-1}$, on a:

$$\mathbb{P}(V_t = v | V_1^{t-1} = v_1^{t-1}) = \pi_t(v|v_1^{t-1}). \quad (15.2)$$

En mots, avec probabilité α le sommet d'ancrage V_t est choisi uniformément dans \mathcal{V}_{t-1} , et avec probabilité $1 - \alpha$ choisi selon une distribution proportionnelle au degré $D_{t-1}(v)$. C'est ce biais vers les sommets de plus fort degré qui fournit l'*attachement préférentiel*. On a alors le

Théorème 15.1. *Soit $\alpha \in [0, 1[$. Soit $X_i(t) = \sum_{v \in \mathcal{V}_t} \mathbf{1}_{D_t(v)=i}$ le nombre de sommets de degré $i \in \mathbb{N}$ dans G_t . Soient les constantes $\{c_i\}_{i \geq 1}$ définies par*

$$c_1 = \frac{2}{3 - \alpha}, \quad \forall i \geq 2, \quad \frac{c_i}{c_{i-1}} = 1 - \frac{3 - \alpha}{2 + 2\alpha + (1 - \alpha)i}. \quad (15.3)$$

On a alors pour tout $i \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_i(t)}{t} = c_i$ presque sûrement.

Voyons en quoi cela implique que le graphe de Barabási-Albert est en loi de puissance. On a pour $i \geq 1$ l'évaluation

$$\begin{aligned} c_i &= c_1 \prod_{j=2}^i \left(1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)j}\right) \\ &= c_1 \exp\left(\sum_{j=2}^i \ln\left(1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)j}\right)\right) \\ &= c_1 \exp\left(\sum_{j=2}^i \left[-\frac{1}{j} \frac{3-\alpha}{1-\alpha} + \gamma_j\right]\right), \end{aligned}$$

où $\gamma_j = O(j^{-2})$, et est donc sommable. On a donc l'équivalent pour $i \rightarrow \infty$:

$$c_i \sim C \times i^{-\beta},$$

où $\beta = \frac{3-\alpha}{1-\alpha}$. C'est en ce sens que le graphe de Barabási-Albert est en loi de puissance d'exposant β . En faisant varier α dans $[0, 1[$, β décrit l'intervalle $[3, +\infty[$.

La preuve procède en deux étapes. On analyse d'abord le comportement des moyennes $x_i(t) := \mathbb{E}X_i(t)$. On contrôle ensuite les probabilités de fluctuation de $X_i(t)$ autour de sa moyenne. Les résultats intermédiaires correspondants constituent les deux lemmes qui suivent.

Lemme 15.1. *(Contrôle de la moyenne $x_i(t)$). Pour $i \geq 1$ et $\epsilon > 0$ fixés, la quantité $\delta_i(t) := x_i(t) - c_i t$ vérifie $\delta_i(t) = O(t^\epsilon)$ en $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. On considère d'abord le cas $i = 1$. La dynamique (15.1) donne la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 0 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = 1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_1(t)}{n_t} + (1 - \alpha) \frac{1 \times X_1(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 1 | \mathcal{F}_t) &= 1 - \mathbb{P}(X_1(t+1) - X_1(t) = 0 | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

On en déduit

$$x_1(t+1) - x_1(t) = 1 - \alpha \frac{x_1(t)}{n_t} - (1 - \alpha) \frac{x_1(t)}{2e_t},$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_1(t+1) &= \delta_1(t) - c_1 + 1 - x_1(t)\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t}\right] \\ &= \delta_1(t)\left[1 - \frac{\alpha}{n_t} + \frac{1-\alpha}{2e_t}\right] + 1 - c_1\left[1 + \frac{\alpha t}{n_t} + \frac{(1-\alpha)t}{2e_t}\right].\end{aligned}$$

L'expression de n_t et e_t implique que lorsque $t \rightarrow \infty$, le coefficient de c_1 s'écrit $1 + \alpha + (1 - \alpha)/2 + O(1/t)$, soit encore $1/c_1 + O(1/t)$. On obtient ainsi:

$$|\delta_1(t+1)| \leq \delta_1(t) + O(1/t),$$

d'où $\delta_1(t) = O(\ln(t))$. L'évaluation $\delta_1(t) = O(t^\epsilon)$ est a fortiori vérifiée.

Pour $i \geq 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = 1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i-1 | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_{i-1}(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{(i-1)X_{i-1}(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = -1 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(D_t(V_{t+1}) = i | \mathcal{F}_t) \\ &= \alpha \frac{X_i(t)}{n_t} + (1-\alpha) \frac{(i)X_i(t)}{2e_t}, \\ \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) = 0 | \mathcal{F}_t) &= 1 - \mathbb{P}(X_i(t+1) - X_i(t) \in \{-1, 1\} | \mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$x_i(t+1) = x_i(t) + x_{i-1}(t)\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i-1)(1-\alpha)}{2e_t}\right] - x_i(t)\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t}\right],$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta_i(t+1) &= \delta_i(t) - c_i + c_{i-1}\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2}\right] + \delta_{i-1}(t)\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i-1)(1-\alpha)}{2e_t}\right] \\ &\quad - c_i\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2}\right] - \delta_i(t)\left[\frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t}\right] + O(t^{-1}) \\ &= \delta_i(t)\left[1 - \frac{\alpha}{n_t} + \frac{(i)(1-\alpha)}{2e_t}\right] + c_{i-1}\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2}\right] \\ &\quad + O(t^{\epsilon-1}) - c_i\left[1 + \alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2}\right],\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence sur i : $\delta_{i-1}(t) = O(t^\epsilon)$. Dans cette dernière relation, les termes constants s'annulent pour

$$c_{i-1}\left[\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{2}\right] = c_i\left[1 + \alpha + \frac{(1-\alpha)i}{2}\right],$$

soit

$$\frac{c_i}{c_{i-1}} = 1 - \frac{3-\alpha}{2+2\alpha+(1-\alpha)i},$$

vérifiée par définition de c_i . Il vient donc

$$|\delta_i(t+1)| \leq |\delta_i(t)| + O(t^{\epsilon-1}).$$

Sommant sur t , on obtient comme annoncé $\delta_i(t) = O(t^\epsilon)$. □

Lemme 15.2. (*Contrôle des fluctuations* $X_i(t) - x_i(t)$). Pour tous $t, i \geq 1$, et tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X_i(t) - x_i(t)| \geq a) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{8t}\right). \quad (15.4)$$

Nous prouverons ce lemme dans la section suivante, après avoir vu l'inégalité d'Azuma-Hoeffding.

Preuve. (du théorème 15.1). On pose, pour tout $t \geq 1$, $a_t := 4\sqrt{t \ln(t)}$. D'après le lemme 15.2, on a

$$\mathbb{P}(|X_i(t) - x_i(t)| \geq a_t) \leq 2 \exp\left(-\frac{16t \ln(t)}{8t}\right) = \frac{2}{t^2}.$$

Ce membre de droite étant sommable en t , le lemme de Borel-Cantelli donne l'existence d'un rang T aléatoire presque sûrement fini tel que:

$$t \geq T \Rightarrow |X_i(t) - x_i(t)| < a_t.$$

Ainsi avec probabilité 1, pour t assez grand, on a:

$$\left| \frac{X_i(t)}{t} - c_i \right| \leq \frac{a_t}{t} + \frac{|\delta_i(t)|}{t}.$$

D'après l'expression de a_t , le premier terme est en $O(\sqrt{\ln(t)/t})$, et tend donc vers 0 en $t \rightarrow \infty$. Le second terme est, d'après le lemme 15.1 en $O(t^{\epsilon-1})$ pour tout $\epsilon > 0$, et tend lui aussi vers 0. Le résultat du théorème en découle. \square

15.2 Inégalité d'Azuma-Hoeffding

Définition 15.1. *Etant donnée une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, i.e. une suite de tribus ordonnée pour l'inclusion (i.e. $\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$), une suite de variables aléatoires $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale pour $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$, i) M_t est \mathcal{F}_t -mesurable, et ii) $\mathbb{E}(M_{t+1} | \text{cal} \mathcal{F}_t) = M_t$.*

L'inégalité d'Azuma-Hoeffding est le théorème suivant:

Théorème 15.2. *Soient une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, et une martingale associée $\{M_t\}_{t \geq 0}$. On suppose que pour tout $s = 1, \dots, t$ il existe des constantes c_s telles qu'on a presque sûrement la propriété d'incrément bornés:*

$$|M_s - M_{s-1}| \leq c_s. \quad (15.5)$$

Alors, pour tout $a > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}\right). \quad (15.6)$$

Preuve. On écrit

$$M_t - M_{t-1} = Zc_t + (1-Z)(-c_t),$$

où la variable aléatoire $Z = [M_t - M_{t-1} + c_t]/(2c_t)$ appartient à $[0, 1]$ d'après l'hypothèse d'accroissements bornés, et vérifie $\mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_{t-1}) = 1/2$ d'après l'hypothèse de martingale. Soit $\theta > 0$. La convexité de la fonction $x \rightarrow e^{\theta x}$ entraîne l'inégalité

$$e^{\theta(M_t - M_{t-1})} \leq Z e^{\theta c_t} + (1-Z) e^{-\theta c_t}.$$

Il vient alors:

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta(M_t - M_{t-1})} | \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq \frac{e^{\theta c_t} + e^{-\theta c_t}}{2}.$$

En développant les exponentielles dans le membre de droite de cette dernière expression, on voit que celui s'écrit

$$\frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} \frac{2(\theta c_t)^{2p}}{(2p)!} \leq \sum_{p \geq 0} \frac{(\theta^2 c_t^2 / 2)^p}{p!} = e^{\theta^2 c_t^2 / 2}.$$

On obtient alors par conditionnements successifs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\theta(M_t - M_0)} &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left\{ e^{\theta(M_t - M_{t-1} + M_{t-1} - M_0)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\theta(M_{t-1} - M_0)} \mathbb{E} \left\{ e^{\theta(M_t - M_{t-1})} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right\} \right] \\ &\leq e^{\theta^2 c_t^2 / 2} \mathbb{E} \left[e^{\theta(M_{t-1} - M_0)} \right] \\ &\leq e^{\theta^2 / 2 \sum_{s=1}^t c_s^2}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Markov donne alors pour $a > 0$:

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) \leq \mathbb{E}e^{\theta(M_t - M_0)} e^{-\theta a} \leq e^{-[\theta a - \theta^2 / 2 \sum_{s=1}^t c_s^2]}.$$

Pour la valeur de $\theta > 0$ qui minimise cette borne, soit $\theta = a / (\sum_{s=1}^t c_s^2)$, on obtient alors la majoration annoncée, en $e^{-a^2 / (2 \sum_{s=1}^t c_s^2)}$. \square

Corollaire 15.1. *Sous les mêmes hypothèses, on a pour tout $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(|M_t - M_0| \geq a) \leq 2e^{-a^2 / (2 \sum_{s=1}^t c_s^2)}. \quad (15.7)$$

Preuve. Le membre de gauche de (15.7) s'écrit

$$\mathbb{P}(M_t - M_0 \geq a) + \mathbb{P}((-M_t) - (-M_0) \geq a).$$

Remarquant que $\{-M_s\}_{s \geq 0}$ est encore une martingale, à incréments bornés par les c_s , on obtient le résultat en appliquant l'inégalité d'Azuma-Hoeffding à chacun des deux termes. \square

Corollaire 15.2. *Soient $t \geq 1$ et des ensembles mesurables $\Omega_1, \dots, \Omega_t$ et soit f une fonction de $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_t$ dans \mathbb{R} . On suppose l'existence de constantes $c_s, s = 1, \dots, t$ telles que pour tout $x_1^t \in \Omega$, tout $s \in [t]$ et tout $y_s \in \Omega_s$, on ait*

$$|f(x_1^t) - f(x_1^{s-1} y_s x_{s+1}^t)| \leq c_t.$$

Alors étant données des variables aléatoires X_s à valeurs dans $\Omega_s, s \in [t]$, la variable aléatoire $Y := f(X_1^t)$ vérifie

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}Y \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2 \sum_{s=1}^t c_s^2}}.$$

Preuve. On définit $\mathcal{F}_s = \sigma(X_1^s)$, et $M_s = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_s]$, $s = 0, \dots, t$, de sorte que \mathcal{F}_0 est la tribu triviale, et donc $M_0 = \mathbb{E}(Y)$, et \mathcal{F}_t contient toute l'information X_1^t , et donc $M_t = Y$. Par ailleurs, les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle garantissent la propriété de martingale pour $\{M_s\}_{s=0, \dots, t}$. On écrit alors

$$M_s = \int_{\Omega_{s+1} \times \dots \times \Omega_t} f(X_1^s x_{s+1}^t) \prod_{i=s+1}^t \mathbb{P}(X_i \in dx_i).$$

Il vient alors pour $s \in \{0, \dots, t-1\}$:

$$|M_s - M_{s-1}| \leq \int_{\Omega_s \times \dots \times \Omega_t} |f(X_1^s x_{s+1}^t) - f(X_1^{s-1} x_s^t)| \prod_{i=s}^t \mathbb{P}(X_i \in dx_i).$$

Par hypothèse sur f , l'intégrand est majoré par c_s , et donc son espérance est elle aussi majorée par c_s . La borne d'Azuma-Hoeffding s'applique donc, donnant le résultat. \square

15.3 Accroissements bornés et couplage

Pour prouver le lemme 15.2, il nous suffit de montrer que la différence $X_i(t) - x_i(t)$ s'écrit $M_t - M_0$ pour une martingale $\{M_s\}_{s=0,\dots,t}$ dont les accroissements sont bornés par 2: en effet le résultat du lemme est alors une simple application de la borne d'Azuma-Hoeffding. Le but de cette section est d'établir le

Lemme 15.3. *Soient $i, t \geq 1$ fixés. Pour tout $s = 0, \dots, t$, on pose $M_s := \mathbb{E}(X_i(t) | \mathcal{F}_s)$, où $X_i(t)$ est le nombre de sommets de degré i dans le graphe de Barabási-Albert G_t , et $\mathcal{F}_s = \sigma(V_1^s)$ représente l'information dans la construction séquentielle jusqu'à l'étape s du graphe en question.*

Alors $X_i(t) - \mathbb{E}(X_i(t)) = M_t - M_0$, et $\{M_s\}$ est une martingale à incréments majorés par 2.

La définition de M_s est semblable à celle dans la preuve du corollaire 15.2. On ne peut cependant pas appliquer ce dernier: ici les variables V_s sont dépendantes. Afin de prouver le lemme, nous allons utiliser la construction de couplage suivante.

Preuve. Soit $s \in [t]$, et soit $v_1^s \in \mathcal{V}_0 \times \dots \times \mathcal{V}_{s-1}$. Soit $V_s' \in \mathcal{V}_{s-1}$, distribué selon $\pi(\cdot | v_1^{s-1})$. On construit alors itérativement (V_u, V_u') pour $u = s+1, \dots, t$ en posant, pour tous $v, v' \in \mathcal{V}_{u-1}$:

$$\begin{aligned} v \notin \{v_s, V_s'\} &\Rightarrow \mathbb{P}(V_u = V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}), \\ (v, v') \in \{v_s, V_s'\} &\Rightarrow \mathbb{P}(V_u = v, V_u' = v' | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \frac{\pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) \pi_u(v' | v_1^{s-1} V_s'^{u-1})}{\pi_u(v_s | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^s V_{s+1}^{u-1})}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Notons G_u et G_u' les graphes construits correspondants respectivement aux points d'ancrage V_u , V_u' . On a alors les propriétés suivantes, par récurrence sur $u = s, \dots, t$. Les degrés $D_{u-1}(v)$ et $D_{u-1}'(v)$ coïncident pour $v \notin \{v_s, V_s'\}$. Cela implique que

$$v \in \mathcal{V}_{u-1} \setminus \{v_s, V_s'\} \Rightarrow \mathbb{P}(V_u = V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) = \pi_u(v | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \quad (15.9)$$

Cela implique aussi, d'après l'identité $\sum_{v \in \mathcal{V}_{u-1}} D_{u-1}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}_{u-1}} D_{u-1}'(v) = 2e_{u-1}$:

$$D_{u-1}(v_s) + D_{u-1}(V_s') = D_{u-1}'(v_s) + D_{u-1}'(V_s').$$

On en déduit:

$$\pi_u(v_s | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^s V_{s+1}^{u-1}) = \pi_u(v_s | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}) + \pi_u(V_s' | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \quad (15.10)$$

Les propriétés (15.9), (15.10) garantissent que l'équation (15.8) définit bien une loi de probabilité pour (V_u, V_u') sur $\mathcal{V}_{u-1} \times \mathcal{V}_{u-1}$, et que par ailleurs pour tout $v \in \mathcal{V}_{u-1}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_u = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) &= \pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1}), \\ \mathbb{P}(V_u' = v | V_{s+1}^{u-1}, V_s'^{u-1}) &= \pi_u(v | v_1^{s-1} V_s'^{u-1}). \end{aligned}$$

Cela entraîne, en prenant des espérances conditionnelles, que la loi de V_u conditionnellement à V_{s+1}^{u-1} est donnée par $\pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1})$, et la loi de V_u' conditionnellement à $V_s'^{u-1}$ est donnée par $\pi_u(v | v_1^s V_{s+1}^{u-1})$. En d'autres termes, la séquence $v_1^s V_{s+1}^u$ a la loi du processus de construction de Barabási-Albert conditionnellement à $V_1^s = v_1^s$, et la séquence $v_1^{s-1} V_s'^u$ a la loi du processus de construction de Barabási-Albert conditionnellement à $V_1^{s-1} = v_1^{s-1}$.

On rappelle que la fonction f est définie telle que le nombre $X_i(t)$ de sommets de degré i dans G_t vaut $f(V_1^t)$. Les propriétés précédentes impliquent alors que, conditionnellement à $V_1^s = v_1^s$, on a

$$M_s = \mathbb{E}f(v_1^s V_{s+1}^t), \quad M_{s-1} = \mathbb{E}f(v_1^{s-1} V_{s-1}'^t).$$

Or, d'après la construction couplée des deux suites (V_u, V'_u) , les degrés des sommets $v \in \mathcal{V}_t$ dans G_t coïncident avec ceux dans G'_t pour tout $u \notin \{v_s, V'_s\}$. Il en ressort que avec probabilité 1,

$$|f(v_1^s V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1} V'_{s-1}{}^t)| \leq 2.$$

Par conséquent,

$$|M_s - M_{s-1}| = |\mathbb{E}[f(v_1^s V_{s+1}^t) - f(v_1^{s-1} V'_{s-1}{}^t)]| \leq 2,$$

comme annoncé. □

Bibliography

- [1] D. Aldous. Ultimate instability of exponential back-off protocol for acknowledgement-based transmission control of random access communication channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33:219–223, 1987.
- [2] S. Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Springer, 2003.
- [3] T. Bodineau. *Modélisation de phénomènes aléatoires: introduction aux chaînes de Markov et aux martingales*. Ecole Polytechnique, 2015.
- [4] J. Bonnans and S. Gaubert. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*. Ecole Polytechnique, 2015.
- [5] A. Ephremides and B. Hajek. Information theory and communication networks: an unconsummated union. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(6), 1998.
- [6] B. Hajek. Notes for ece 467: Communication network analysis. 2006.
- [7] F. Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *Eur. Trans. Telecommun.*, (8):33–37, 1997.
- [8] F. Kelly and E. Yudovina. *Stochastic Networks*. Cambridge University Press, 2014.
- [9] P. Key and L. Massoulié. Fluid models of integrated traffic and multipath routing. *Queueing Systems: Theory and Applications*, 2006.
- [10] T. Lindvall. *Lectures on the coupling method*. Dover, 2002.
- [11] J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18:155–162, 1950.
- [12] P. Robert. *Réseaux de communications, algorithmes et probabilités*. Ecole Polytechnique, 2014.
- [13] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [14] H.-Q. Ye, J. Ou, and X.-M. Yuan. Stability of data networks: stationary and bursty models. *Oper. Res.*, 53(1):107–125, 2005.