MAP 311: Aléatoire PC 9

Marc Lelarge

27 juin 2016

Exercice 1: modèle auto-regressif d'ordre 1

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et X_0 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2)$ indépendante de $(Y_n)_{n\geq 1}$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la suite récurrente aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ par

$$X_n = aX_{n-1} + Y_n.$$

1. Montrer que $(X_0, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.
2. Déterminer la loi de X_n et exprimer $Cov(X_k, X_n)$ en fonction de $Var(X_k)$ pour $0 \leq k \leq n$.
3. A quelle condition la suite (X_n) converge-t-elle en loi? Quelle est alors la limite? Quelle est la loi de X_n si X_0 a cette loi?
4. Montrer que si $a \in (-1, 1)$, le vecteur (X_n, x_{n+1}) converge en loi vers un vecteur gaussien dont on déterminera les paramètres.
5. pour $a \in (-1, 1)$, étudier la convergence en loi de la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 2: Paradoxe de St Petersbourg

Dans un casino, un jeu consiste à parier sur un tirage aléatoire d'une variable X à valeur dans $\{1, \dots, K\}$. La distribution de X est $p(x)$. Si $X = k$, le casino multiplie la somme misée sur k par $1/p(k)$ et toutes les autres mises sont perdues. Une stratégie q d'un joueur est de mettre de coté (c'est à dire ne pas miser) une fraction $q(0)$ de son capital et pour le reste de miser une fraction $q(k)$ de son capital sur la valeur k. Donc une stratégie q est telle que $q(k) \geq 0$ pour tout $k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^K q(k) = 1$. On suppose que la distribution $p(x)$ est connue du joueur.

1. On considère une stratégie q avec $q(0) > 0$. Montrer qu'il existe une stratégie $\hat{q}$ avec $\hat{q}(0) = 0$ qui est aussi performante que q, dans le sens où le joueur aura la même somme d'argent quelle que soit la valeur prise par X pour les deux stratégies.
   On suppose pour la suite que $q(0) = 0$. On définit:
   $$R_n = \frac{1}{n} \log \frac{C_n}{C_0},$$
   le taux de retour du joueur où C_0 est le capital initial et C_n est le capital après n tours dans le jeu.
2. En utilisant la loi des grands nombres, calculer $r = \lim_{n\to\infty} R_n$ en fonction des distributions p et q. Montrer que pour la stratégie optimlae $r = 0$.

3. On suppose maintenant que avant chaque tour i, le joueur a une information donnée par Y_i qui est corrélée à X. La distribution de (X_i, Y_i) est $p(x, y)$. La stratégie du joueur au tour i, étant donné l'information $Y_i = y$ est de parier une fraction notée $q(k|y)$ de son capital sur la valeur k. Recalculer $r = \lim_{n\to\infty} R_n$.

4. Trouver la stratégie $q(x|y)$ qui maximise r et montrer que le taux de retour est positif ou nul.

Paradoxe de St Petersbourg: on considère le jeu suivant: pour un prix d'entrée de c euros, un joueur recoit 2^k euros avec probabilité 2^{-k}. Certains disent qu'ils ont 'intérêt' à jouer quelque soit la valeur de c. Pourquoi? Bernoulli dans Specimen theoriae novae de mensura sortis (1738) propose de résoudre le paradoxe en intoduisant une fonction d'utilité logarithmique pour l'argent: une somme s a une utilité $\ln s$. L'utilité moyenne devient alors $E[\ln X] = \ln 4$ et donc Bernoulli accepte de jouer uniquement si $c < 4$. Le choix de la fonction d'utilité logarithmique étant arbitraire, nous allons étudier une autre solution de ce paradoxe.

5. On suppose maintenant que le joueur peut acheter une part du jeu. Par exemple, s'il investit $c/2$ euros dans le jeu, il recoit $X/2$ avec $P(X = 2^k) = 2^{-k}$. On suppose les $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. et que le joueur est obligé de réinvestir la totalité de sa fortune à chaque étape. Soit $F_n(c)$ sa fortune au temps n. On suppose que $F_0(c) = 1 \leq c$. Montrer qu'il existe c^* tel que pour $c < c^*$ sa fortune tend vers l'infini et si $c > c^*$ elle tend vers 0. Calculer la valeur du prix 'équitable' c^* et pour une distribution différente de X.

6. Etudier le cas où le joueur peut choisir de ne miser qu'une fraction de sa fortune. Pour quelle valeur de c, le joueur va-t-il choisir de parier toute sa fortune?

7. Question bonus: Si on a $P(X = 2^{2^k - 1}) = 2^{-k}$, faut-il investir la totalité de sa fortune pour toute valeur de c?

Exercice 3: Modèle de Fisher-Wright

On considère l'évolution d'une population de taille fixe $N > 1$ dont chaque individu est de type A ou B. La génération $t+1$ s'obtient en tirant pour chaque individu de la génération $t+1$, de manière i.i.d. uniforme, un parent dans la génération t. Soit X_t le nombre d'individus de type A dans la génération t. On s'intéresse au comportement en temps long de la suite récurrente aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$, en fonction du point de départ $X_0 = x_0$ (fixé).

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tous $0 \leq x, y, x_1, \ldots, x_{t-1} \leq N$

$$P_{x,y} = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \binom{N}{y} \left(\frac{x}{N}\right)^y \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-y};$$

2. Montrer que $\mathbb{P}(\cap_{s\geq t}\{X_s = x\} | X_t = x) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \{0, N\}$;

3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{t+1} \in \{0, N\} | X_t = x) \geq 2^{1-N}$ pour tout $0 \leq x \leq N$ et tout $t \geq 0$;

4. En déduire que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ et que $\mathbb{E}(T) \leq 2^{1-N}$ o $T = \inf\{t > 0 : X_t \in \{0, N\}\}$;

5. En déduire que $(X_t)_{t\geq 0}$ converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ vers la v.a. X_T valeurs dans $\{0, N\}$;

6. Montrer que $\mathbb{E}(X_t) = x_0$ pour tout $t \geq 0$, puis que $\mathbb{P}(X_T = N) = x_0/N$;

Avec ce modèle, presque sûrement, l'un des types finit par disparaître complètement de la population en un temps fini (aléatoire). On modifie à présent le modèle en introduisant des mutations : après avoir choisi un parent, on transforme A en B (resp. B en A) avec probabilité u (resp. v).

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tous $0 \leq x, y, x_1, \ldots, x_{t-1} \leq N$, avec $p_x = \frac{x}{N}(1-u) + \left(1 - \frac{x}{N}\right)v$,

$$P_{x,y} = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \binom{N}{y} p_x^y (1-p_x)^{N-y};$$

2. Montrer que si $0 < u, v < 1$ alors $P_{x,y} > 0$ pour tous $0 \leq x, y \leq N$;

3. On pose $m_t = \mathbb{E}(X_t)$. Montrer que $m_0 = x_0$ et $m_{t+1} = m_t(1-u-v) + Nv$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que $m_t \to Nv/(u+v)$ quand $t \to \infty$ (notez que cette limite ne dépend pas de x_0);