MAP 311: Aléatoire PC 6

Marc Lelarge

6 juin 2016

Exercice 1

Montrer sur des exemples que: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ n'implique pas que $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$; si X, Y, Z sont trois v.a. telles que X et Y aient la même loi, cela n'entraine pas que XZ et YZ aient la même loi.

Exercice 2: fonctions caractéristiques

1. Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la v.a. X dans les cas suivants: X est une v.a. de Bernoulli de paramètre p; X est une binomiale de paramètre n et p; X est une variable de Poisson de paramètre λ.

2. Démontrer que si $np_n \to \lambda$ quand $n \to \infty$ et si $X_n \sim B(n, p_n)$, alors (X_n) converge en loi vers une v.a. de Poisson de paramètre λ.

3. Calculer la fonction caractéristique ϕ_X de la v.a. X dans les cas suivants: X suit une loi uniforme sur $[-a, a]$; X suit une loi exponentielle de paramètre λ; X suit une loi exponentielle symétrique de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$; X suit une loi de Cauchy de paramètre λ de densité $h(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$. On rappelle la formule d'inversion de Fourier: si $\int |\phi_X(t)| dt < +\infty$, alors X admet une densité continue bornée donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

4. Montrer que si X et Y sont deux lois de Cauchy indépendantes de paramètres c et c', $X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $c + c'$. Montrer que si $\alpha > 0$, αX suit une loi de Cauchy de paramètre αc. Montrer que si X et Y sont i.i.d. suivant une loi de Cauchy alors $\frac{X+Y}{2} \sim X$.

Exercice 3

Utiliser le théorème limite centrale pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4: caractérisation de la loi normale.

Soient X et Y deux v.a.r. i.i.d. On suppose que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est de même loi que X et Y et que cette loi est de variance finie σ^2.

1. Montrer que X est centrée.

2. Montrer que si X_1, X_2, Y_1, Y_2 sont des v.a.r. indépendantes de même loi que X, $\frac{1}{2}(X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2) \sim X$.

3. Démontrer par récurrence en utilisant le théorème limite central que $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Exercice 5: transformée de Laplace.
Pour une v.a. X, on définit $M(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$ pour les valeurs de t où $M(t)$ est finie: $U = \{t,\ M(t) < \infty\}$. Dans chacun des cas suivants, vérifier la valeur de M_X et préciser U:

1. $X \sim N(0,1)$, $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

2. $X \sim Poi(\lambda)$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$.

3. $X \sim Exp(\lambda)$, $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.

4. Montrer que pour tous réels a, b on a $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$.

Exercice 6: lois indéfiniment divisibles.
On dit qu'une v.a.r. X est indéfiniment divisible si pour tout n, il exise n v.a.r. indépendantes et de même loi $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ telles que

$$X \sim X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}.$$

1. Montrer que X est indéfiniment divisible si et seulement si pour tout n, sa fonction caractéristique ϕ_X est la puissance n-ième d'une fonction caractéristique.

2. Montrer que X est indéfiniment divisible dans chacun des cas suivants: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $X \sim Poi(\lambda)$; X suit une loi de Cauchy.

3. Soient $Y \sim Poi(\lambda)$ et (X_n) est une suite de v.a. i.i.d. indépendantes de Y. Montrer que $Z = \sum_{n=1}^{Y} X_n$ est indéfiniment divisible.