# MAP 311: Aléatoire PC 5

Marc Lelarge

30 mai 2016

**Exercice 1: Orthogonalité et indépendance**

Soit $X$ et $\epsilon$ deux v.a. indépendantes avec $X \sim N(0,1)$ et $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de $Y = \epsilon X$ et la covariance de $X$ et $Y$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Le vecteur $(X, Y)$ est-il gaussien?

**Exercice 2: LGN**

En considérant une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, et en utilisant la loi faible des grands nombres, établir que pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = f(1/2).$$

**Exercice 3**

On considère une suite $(X_n, n \geq 1)$ de v.a.r. i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. On se donne une suite $(a_n, n \geq 1)$ d'entiers satisfaisant à:

$$\log_2 n \leq a_n \leq 1 + \log_2 n.$$

On regarde $(X_n, n \geq 1)$ par blocs successifs, le $n$-ième bloc de longueur $a_n$ étant

$$X_{a_1+\cdots+a_n+1}, \ldots, X_{a_1+\cdots+a_{n+1}}.$$

Quelle est la probabilité pour qu'on rencontre une infinité de blocs ne contenant que des 1?

**Exercice 4: LFGN**

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a.r. i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^4] < +\infty$.

1. Montrer en utilisant l'inégalité de Markov et le lemme de Borel-Cantelli que $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$ p.s.
2. Montrer que si les v.a.r. $X_n$ ne sont plus de même loi, mais que $\mathbb{E}[X_n^4]$ est borné, le résultat reste vrai.

**Exercice 5: Réduction de variance dans une méthode de Monte Carlo**

Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une fonction mesurable et bornée. On souhaite calculer $m = \int_0^1 g(x)\,dx$. On pose $\sigma^2 := \int_0^1 g^2(x)\,dx - m^2$. Soient $X$ et $Y$ des v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$U = \mathbf{1}_{Y \leq g(X)}, \quad V = g(X), \quad \text{et} \quad W = \frac{g(X) + g(1-X)}{2}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de $U, V, W$, et comparer les variances;
2. Proposer trois méthodes de type Monte-Carlo pour calculer $m$;
3. On suppose dans la suite que $g$ est monotone. Vérifier que $\mathbb{E}(g(X)g(1-X)) \leq m^2$. *Indication:* on pourra d'abord montrer que $(g(x) - g(y))(g(1 - x) - g(1 - y)) \leq 0$ pour tous $x, y$.
4. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et les estimateurs de $m$

$$A_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} g(X_i) \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (g(X_i) + g(1 - X_i)).$$

   Lequel possède la plus petite erreur quadratique moyenne ?

5. Dans le cas où $g(x) = x^2$, déterminer le nombre $n$ de simulations nécessaires garantissant une précision relative de 1% sur le calcul de $m$ en erreur quadratique avec $A_n$ et $B_n$.

**Exercice 6: Biais par la taille**

On considère une population comportant un grand nombre $n$ de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de v.a. i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ sur $\mathbb{N}^*$, de moyenne $m := \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k \geq 1} p_k < \infty$ o $p_k := \mathbb{P}(X_1 = k)$. Soit $T$ la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que $\mathbb{P}(T = k) \approx \frac{k}{m} p_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 7: Processus de Poisson**

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson simple d'intensité $\lambda > 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $0 := t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, les v.a. $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes avec $N_{t_k - t_{k-1}} \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t_k - t_{k-1}))$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrer que p.s.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

**Exercice 8: Matrices aléatoires**

Soit $(X_{i,j})_{i,j \geq 1}$ un tableau infini de v.a.r. i.i.d. de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$. Soit $M := (X_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice aléatoire $m \times n$ obtenue en tronquant le tableau dans son coin supérieur gauche. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de la matrice symétrique aléatoire $\frac{1}{n} M M^\top$ (ce sont des v.a.r. dépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Montrer que

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}{m} \xrightarrow[mn \to \infty]{p.s.} \sigma^2 + \mu^2.$$