MAP 311: Aléatoire PC 4

Marc Lelarge

23 mai 2016

Exercice 1: Caractérisation par les moments

Montrer que si deux v.a.r. *bornées* X et Y ont les mêmes moments, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi. Indication: utiliser le théorème de Weierstrass de densité des polynômes.

Exercice 2: Simulation par la méthode d'inversion

1. Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ quelle est la loi de $X = \ln(1/U)$ et $Y = \tan(\pi(U - 1/2))$?
2. On considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ dont on connaît explicitement l'inverse généralisée
$$p \in [0,1] \mapsto F^{-1}(p) = \inf\{x;\, F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Si U est une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$, montrer que la v.a. $X := F^{-1}(U)$ suit la loi de fonction de répartition F. Retrouver les résultats de la première question, et en déduire plus généralement une méthode de simulation de v.a.r. (discuter le cas des v.a.r. discrètes).
3. Quelle est la loi de $F(X)$ lorsque F est continue?

Exercice 3: Des lois normales à la loi de Cauchy

Montrer que si X et Y sont des v.a. indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors $Z = X/Y$ est de loi de Cauchy de densité $f_Z(z) = (\pi(1+z^2))^{-1}$.

Exercice 4: Somme de variables indépendantes et convolution

1. Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes. Exprimer la loi de (X,Y) puis de $X+Y$ en fonction de la loi de X et de la loi de Y;
2. Soient X et Y deux v.a. réelles de densités f_X et f_Y, indépendantes. Montrer que (X,Y) et $X+Y$ ont des densités, notées $f_{(X,Y)}$ et f_{X+Y}, qu'on exprimera en fonction de f_X et f_Y;
3. Calculer la densité de $X+Y$ lorsque X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$;
4. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $X+Y$ suit la loi Gamma de densité $\lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$;
5. Établir par récurrence sur n que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi Gamma de densité $\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$;
6. Établir par récurrence sur n que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes avec $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour tout $1 \leq k \leq n$, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.

Exercice 5: Simulation des lois gaussiennes avec l'algorithme de Box-Muller

1. Soient (X, Y) un couple de v.a.r. et son écriture en coordonnées polaires $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que X et Y sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$ si et seulement si r et θ sont indépendantes avec r^2 de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et θ de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$;

2. Soient U et V deux v.a.r. uniformes sur $[0,1]$. Montrer que les v.a.r. $X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6: Somme de deux v.a. exponentielles de paramètres distincts
Soient X et Y des v.a. indépendantes de densités exponentielles de paramètres respectifs α et β, $\alpha \neq \beta$. Calculer la densité de $X + Y$.

Exercice 7: Loi gamma, bêta, χ^2
Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$. On appelle loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $G(a, \lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $\gamma_{a,\lambda}$ où

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Vérifier que $\Gamma(a)$ est défini pour $a > 0$, montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et clculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit X une v.a. de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

3. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives $G(a, \lambda)$, $G(b, \lambda)$. Montrer que $X+Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leurs lois de probabilités. En déduire:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

   Donner la loi de $\frac{X}{Y}$. Reprendre la question 4 de l'exercice 4.

4. Soit Y une v.a. gaussienne centrée réduite. Montrer que Y^2 a la loi gamma $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont n v.a. indépendantes gaussiennes centrées réduites, donner la loi de probabilité de $Z = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ et calculer $\mathbb{E}(Z)$, $Var(Z)$.

Exercice 8: Files d'attente
On considère deux files indépendantes de m et $n > m$ personnes devant des guichets dont les temps de service ont la même distribution exponentielle de paramètre λ. Montrer que la probabilité p_0 que la plus longue des files s'achève la première est égale à la probabilité d'obtenir n faces avant m piles dans un jeu de pile ou face équilibré. Calculer p_0 et en donner une expression intégrale avec $B(n, m)$.