MAP 311: Aléatoire PC 3

Marc Lelarge

9 mai 2016

Exercice 1: Inégalité de Paley-Zygmund
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$, montrer que pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}\left(X > \theta \mathbb{E}[X]\right) \geq (1-\theta)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Astuce: noter que $X \leq \theta \mathbb{E}[X] + X \mathbf{1}_{\{X > \theta \mathbb{E}[X]\}}$.

Exercice 2: Lois de Cauchy
Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$.

1. Calculer et reconnaître la loi de $1/X$;
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 3: Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire
Montrer que pour toute v.a.r. X positive telle que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{L}(X)$ est une loi exponentielle ;
2. La loi de $X - t$ sachant $\{X > t\}$ est égale à la loi de X, pour tout $t \geq 0$.

Exercice 4: Moyenne et Médiane
Soit X une v.a.r. à densité. Une médiane de X est une valeur $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{P}(X \geq \mu) = \mathbb{P}(X \leq \mu).$$

1. Montrer que X admet toujours une médiane.
2. Si X est intégrable, montrer que la médiane minimise la quantité $\mathbb{E}(|X-\mu|)$.
3. Si X est de carré intégrable, montrer que la moyenne $m = \mathbb{E}[X]$ minimise la quantité $\mathbb{E}((X-m)^2)$.
4. En déduire un majorant simple de $|m-\mu|$ en fonction de l'écart type $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}((X-m)^2)}$.
5. Caclculer la médiane d'une loi exponentielle.

Exercice 5: Lois exponentielles en série et en parallèle

On considère n composants pouvant être montés en série ou en parallèle. On modélise leurs durées de vie par des v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$ indépendantes de loi exponentielle de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. On suppose que le système est monté en parallèle: il fonctionne ssi au moins un des composants fonctionne. Déterminer la loi de la durée de vie P du système;

2. On suppose que le système est monté en série: il fonctionne ssi tous les composants fonctionnent. Déterminer la loi de la durée de vie S du système.

Exercice 6: Soit (X,Y) et (X',Y') des couples de densités

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x,y). \quad \text{et} \quad f_{(X',Y')}(x',y') = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x',y').$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien de densités;

2. Montrer que (X,Y) et (X',Y') ne suivent pas la même loi;

3. Montrer que (X,Y) et (X',Y') ont les mêmes lois marginales, c'est-à-dire que X et X' sont de même loi, et que Y et Y' sont de même loi (en fait X, X', Y, Y' sont de même loi !).

Exercice 7: Statistique d'ordre

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. de densité f.

1. Montrer que p.s. il existe une unique permutation aléatoire σ telle que $X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n)}$, et que σ suit la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

2. Montrer que le n-uplet $(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$ admet une densité que l'on calculera.

3. Calculer la loi de probabilité de $X_{\sigma(1)}$, de $X_{\sigma(n)}$, du couple $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(n)})$ et enfin de $X_{\sigma(i)}$ pour $2 \leq i \leq n-1$.

4. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{\sigma(1)}$ sachant $X_{\sigma(n)}$ et $\mathbb{E}(X_{\sigma(1)}|X_{\sigma(n)})$. Faire le calcul explicite pour des v.a. uniformes sur $[0,1]$.

5. Dans cette question, on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a..r. indépendantes de distribution uniforme sur $[0,t]$. On note $L_1 = X_{\sigma(1)}$, $L_2 = X_{\sigma(2)} - X_{\sigma(1)}$, $\ldots$, $L_{n+1} = t - X_{\sigma(n)}$ et si $h \geq 0$, $p_n(t) = \mathbb{P}(L_1 \geq h, \ldots, L_n \geq h, L_{n+1} \geq h)$. Montrer que $p_n(t) = \frac{n}{t^n}\int_{nh}^{t-h} x^{n-1} p_{n-1}(x)dx$. En déduire $p_n(t)$ et la fonction de répartition de $\min(L_1, \ldots, L_{n+1})$. Déterminer $r_n(t) = \mathbb{P}(L_1 > x_1, \ldots, L_{n+1} > x_{n+1})$ où $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont $n+1$ réels fixés et en déduire $q_n(t) = \mathbb{P}(L_2 > h, \ldots, L_n > h)$. Montrer directement que $p_n(t) = \left(\frac{t-2h}{t}\right)_+^n q_n(t-2h)$ où $y_+ = \max(y,0)$.