MAP 311: Aléatoire PC 1

Marc Lelarge

18 avril 2016

Exercice 1: Vous tirez à pile ou face 3 fois. Au moins deux tirages sont identiques et le troisième étant équitable, on a $\mathbb{P}($ 3 tirages identiques$) = 1/2$. Êtes-vous d'accord?

Exercice 2: On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc. Soit A l'événement "le chiffre du dé noir est pair", B l'événement "le chiffre du dé blanc est impair", C l'événement "les deux chiffres ont même parité". Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que les trois événements A, B et C ne le sont pas.

Exercice 3: On considère n menteurs I_1, I_2, ..., I_n. I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non", la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n, et I_n l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec probabilité p, $0 < p < 1$, le contraire avec probabilité $1 - p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini?

Exercice 4: Soit $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_r) = 1$ pour tout r. Montrer que $\mathbb{P}\left(\cap_{r=1}^{\infty} A_r\right) = 1$.

Exercice 5: Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements. Montrer que:

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}).$$

(a) Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant chaque personne dépose sa veste dans un vestiaire. Au petit matin, quand les esprits ne sont plus clairs, chacun prend au hasard une veste. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins ait sa propre veste ?

(b) En déduire le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ sans point fixe;

(c) En s'inspirant de la question (a), calculer la probabilité $\pi_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste;

(d) Calculer la limite $\pi(k)$ de $\pi_n(k)$ quand n tend vers l'infini. Vérifier que la famille $(\pi(k), k \in \mathbb{N})$ détermine une probabilité sur $\mathbb{N}$. Il s'agit en fait de la loi de Poisson.

Exercice 6: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. On définit Y_N par

$$Y_N(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega), \text{ pour } \omega \in \Omega.$$

Montrer que Y_N est bien une v.a.

Exercice 7:
On modélise la taille Z_n d'une population à l'instant n par un processus de Galton Watson:

$$Z_0 = 1 \quad \text{ et pour tout } n \geq 0, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i},$$

où les $X_{n,i}$ sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées de distribution X. On définit la probabilité d'extinction par:

$$\eta = \mathbb{P}(\exists n,\ Z_n = 0).$$

(a) Donner la valeur de η lorsque $\mathbb{P}(X \leq 1) = 1$.

(b) Soit $\eta_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Montrer que $\eta_n \to \eta$.

(c) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X]^n$. Donner la valeur de η lorsque $\mathbb{E}[X] < 1$.

(d) Montrer que la fonction génératrice de X, $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ est strictement croissante et strictement convexe pour $s > 0$ lorsque $\mathbb{P}(X \leq 1) < 1$.

(e) Soit $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $G_n(s) = G_X(G_{n-1}(s))$ et que η est la plus petite solution de $s = G_X(s)$.

(f) Montrer que $\eta < 1$ lorsque $\mathbb{E}[X] > 1$. Qu'en est-il lorsque $\mathbb{E}[X] = 1$?

Soit T la population totale: $T = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$. Montrer que la fonction génératrice de T, $G_T(s)$ satisfait pour $0 \leq s < 1$,

$$G_T(s) = sG_X(G_T(s)) \quad \text{ et, } \quad G_T(1) = \eta.$$

Montrer que $\mathbb{E}[T] = (1 - \mathbb{E}[X])^{-1}$ pour $\mathbb{E}[X] < 1$.

Exercice 8: Montrer que pour toute v.a. X à valeur dans $\{1, 2, \ldots\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) X suit une loi géométrique;

(2) La loi de $X - n$ sachant $\{X > n\}$ est identique à la loi de$X$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 9: 10% d'une sphère est coloriée en bleu et le reste en rouge. Montrer qu'il est toujours possible d'inscrire un cube dans la sphère dont tous les sommets soient rouges.

Exercice 10: permutation aléatoire.
Commencons par un jeu coopératif entre N joueurs numérotés de 1 à N. Une fois le jeu commencé, aucune communication ne sera plus autorisée entre les joueurs. Les règles sont les suivantes. Dans une salle, N boites fermées et numérotées de 1 à N renferment chacune un numéro compris entre 1 et N. Chaque numéro est dans exactement une boite et le tirage est uniforme. De plus chaque numéro est écrit en noir ou en rouge avec probabilité 1/2 de manière indépendante. L'équipe gagne si chacun des joueurs devine la couleur de son propre numéro contenu dans l'une des boites. Chaque joueur rentre séparément dans la salle et peut ouvrir au plus $N/2$ boites.

Prenons $N = 100$. Quelle est la probabilité de succès si chacun ouvre les boites 1 à 50 et s'il ne trouve pas son numéro, dit une couleur au hasard? Que se passe-t-il si au lieu d'ouvrir les 50 premières boites, chacun ouvre 50 boites au hasard?

À une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_N$, on associe un graphe dirigé sur N sommets et avec N arcs donnés par $v \to \sigma(v)$. C'est un graphe cycle. On tire une permutation uniformément au hasard.

(a) Montrer que pour $v \in \{1, \dots N\}$, la probabilité que v soit un point fixe est $1/N$.

(b) Montrer que la probabilité pour que le graphe soit un N-cycle est $1/N$.

(c) Quelle est la probabilité que v soit dans un M-cycle?

(d) Quelle est la longueur moyenne du cycle contenant v?

(e) Pour $M \geq N/2$, montrer que la probabilité qu'un M-cycle existe est égale à $1/M$.

(f) En déduire que la probabilité d'avoir un cycle de longueur supérieur à $N/2$ est de l'ordre de $\ln 2 = 0.69....$ En déduire une startégie ayant une probabilité de succès de 0.31 pour N grand.