Magistère de Mathématiques Fondamentales & Appliquées et d'Informatique

Contrôle final du cours : Système Digital.
Corrigé.

Question 1 (Soustracteur binaire complet) *1. Réaliser un circuit combinatoire $a\bar{b}c$ dont les deux sorties s, r sont reliées aux trois entrées a, b, c par la relation*

$$a - b + c \quad = \quad -s + 2r. \tag{1}$$

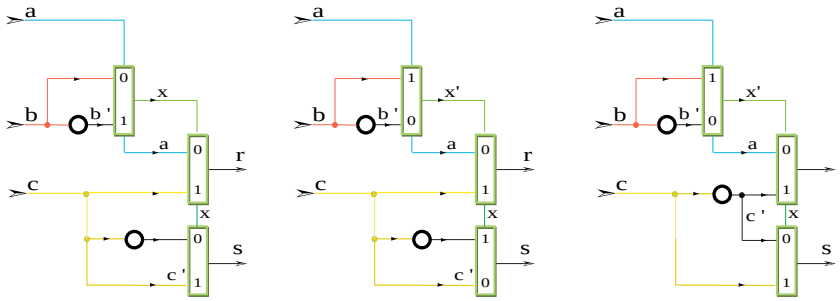
2. Réaliser un circuit combinatoire $a\bar{b}\bar{c}$ dont les deux sorties s, r sont reliées aux trois entrées a, b, c par la relation

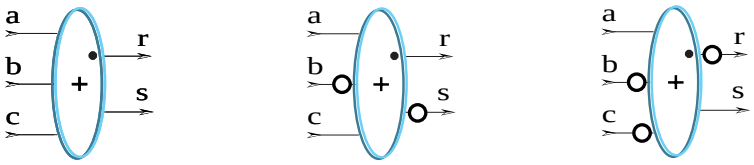
$$a - b - c \quad = \quad s - 2r. \tag{2}$$

Réponse 1 *L'additionneur binaire complet calcule la solution de l'équation*

$$a + \beta + \gamma = \sigma + 2\rho. \tag{3}$$

1. *En posant $\beta = 1 - b$, $\sigma = 1 - s$ et $\gamma = c, \rho = r$ on transforme l'équation (3) en (1). Le circuit $a\bar{b}c$ est donc un additionneur binaire complet dont on inverse l'entrée b et la sortie s.*
2. *En posant $\beta = 1 - b, \gamma = 1 - c$, $\rho = 1 - r$ et $\sigma = s$ on transforme (3) en (2). Le circuit $a\bar{b}\bar{c}$ est donc un additionneur binaire complet dont on inverse les entrées b, c et la sortie r.*

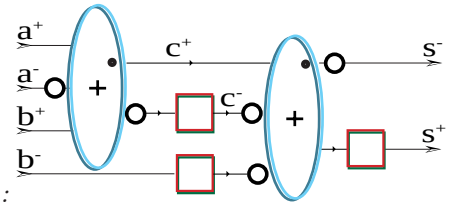




Les schémas ci-dessus montrent que les circuits $a\bar{b}c$ et $a\bar{b}\bar{c}$ sont réalisables en cinq **mux**, *tout comme abc. Ils donnent aussi les icônes utilisées pour représenter ces circuits par la suite.*

Question 2 (Additionneur série par les poids forts) *1. Réaliser un circuit synchrone $S = \mathcal{A}(A, B)$ tel que : $S = \frac{A+B}{4}$.*

2. Est-il possible de réaliser un additionneur en série, par les poids forts, qui calcule $S = \frac{A+B}{2}$?



Réponse 2 *1. Considérons le circuit :*

L'invariant (1) de la porte $a\bar{b}c$ donne : $a^+ - a^- + b^+ = -c' + 2c^+$; celui (2) de $a\bar{b}c$: $c^+ - c^- - b' = s' - 2s^-$.

Pour les trois registres, on a : $c^- = \frac{c'}{2}$, $b' = \frac{b^-}{2}$ et $s^+ = \frac{s'}{2}$. En substituant :

$$s^+ - s^- = \frac{a^+ - a^- + b^+ - b^-}{4}.$$

2. La fonction $Y = f(A, B)$ calculée par un circuit en série est nécessairement causale *: le chiffre de sortie $y_{\mathbf{N}}$ au temps $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$ ne dépend que des chiffres d'entrée vus à ce point :*

$$y_{\mathbf{N}} = f_{\mathbf{N}}(a_0 \cdots a_{\mathbf{N}} b_0 \cdots b_{\mathbf{N}}),$$

où $f_{\mathbf{N}} \in \mathbf{B}^{2(\mathbf{N}+1)} \mapsto \mathbf{B}$ est une fonction combinatoire (booléenne sans mémoire).

Considérons le calcul par un circuit causal : $Y = f(A, B) = (A + B)/2$. Le bit de sortie au cycle 0 ne dépend que de a_0 et b_0 : $y_0 = f_0(a_0, b_0)$. Observons sa valeur, pour l'entrée : $a_0 = 1, b_0 = 0$. Si $y_0 = 0$ ou $y_0 = \bar{1}$, la demi somme est fausse *pour l'entrée $a_{\mathbf{N}+1} = b_{\mathbf{N}+1} = 1 : (a+b)/2 = \frac{3}{2} > 1$, alors que $Y \leq 1$. Si $y_0 = 1$, la demi somme est* fausse *pour l'entrée $a_{\mathbf{N}+1} = b_{\mathbf{N}+1} = \bar{1} : (a + b)/2 = -\frac{1}{2} < 0$, alors que $Y \geq 0$. Conclusion : il n'y a pas de circuit* causal *pour calculer $(A + B)/2$.*

Question 3 (Multiplicateur série par les poids forts) *1. Réaliser un multiplicateur $\mathcal{M}_c$ par la constante $c = \frac{7}{32}$.*

2. Décrire une structure générale de multiplicateur $\mathcal{M}_c$ par le nombre dyadique *$c = \frac{n}{2^p}$.*

3. Pour quelles valeurs de c $\mathcal{M}_c$ est-il réalisable ?

Réponse 3 *1. Partant de la décomposition $P = \frac{7A}{32} = \frac{1}{4}(A - \frac{A}{8})$, on arrive à :*

$$P = \mathcal{M}_{\frac{7}{32}}(A) = \mathcal{S}(A, \mathbf{reg}(\mathbf{reg}(\mathbf{reg}(A)))).$$

La soustraction en série par les poids forts s'obtient en composant l'additionneur de la question 2 avec le circuit de l'exemple 1 : $\mathcal{O}(B) = -B$, soit $\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{A}(A, \mathcal{O}(B))$. Toutes les variables dans ces circuits sont représentées par deux bits rbs, présentés en série par les poids forts.

2. *La réponse à la question 6 montre que $c \leq 1/3$ est équivalent à l'existence d'une rbsn dont les deux premiers chiffres soient nuls : $c_0 = c_1 = 0$, et $c_{\mathtt{N}} \times c_{\mathtt{N}+1} = 0$ pour $\mathtt{N} \in \mathbf{N}$.*
La multiplication égyptienne *(binaire) par les poids faibles de c donne :*

$$\begin{aligned} P_{\mathtt{N}-1} &= c_{\mathtt{N}-1}A, \\ P_{\mathtt{N}-2-k} &= c_{\mathtt{N}-2-k}A + \frac{P_{\mathtt{N}-1-k}}{2}, \end{aligned}$$

pour $0 \leq k < \mathtt{N} - 1$. On ne conserve que le produit final : $P_0 = c \times A$.
La structure du circuit $P = \mathcal{M}_c(A)$ se calque sur les étapes de la multiplication égyptienne. On groupe une étape dont le chiffre $c_{\mathtt{N}} \neq 0$ est non nul, avec la suivante, dont on sait que le chiffre $c_{\mathtt{N}+1} = 0$ est nul. Il y a trois cas de réalisation pour chaque chiffre $c = c_{\mathtt{N}} \in \mathcal{S}$: registres, additionneur $\mathcal{A}$, ou soustracteur $\mathcal{S}$ en série :

$c = 0$ $\qquad P_{\mathtt{N}-2-k} = \mathbf{reg}(P_{\mathtt{N}-1-k})$;

$c = 10$ $\qquad P_{\mathtt{N}-3-k} = \mathcal{A}(A, \mathbf{reg}(P_{\mathtt{N}-1-k}))$;

$c = \bar{1}0$ $\qquad P_{\mathtt{N}-3-k} = \mathcal{S}(\mathbf{reg}(P_{\mathtt{N}-1-k}), A)$.

Le multiplicateur $\mathcal{M}_{c_0 \cdots c_{\mathtt{N}-1}}$ comprend $\mathtt{N}$ registres et $m(c)$ additionneurs $\mathcal{A}$. Ici, $m(c) = \sum |c_{\mathtt{N}}|$ est le nombre de chiffres non nuls dans la rbsn du nombre c. On a : $Max(m(c)) = \frac{\mathtt{N}}{2}$, et $Moy(m(c)) = \frac{\mathtt{N}}{3}$, d'après la réponse à la question 7.

3. *On peut se limiter à $c \geq 0$, puisque $(-c) \times A = -(c \times A)$.*
Signalons les cas triviaux $c \in \{0, 1, \frac{1}{2}\}$. Hors de ces cas triviaux, nous devons montrer que $c \times A$ n'est pas causal si :

$$c = {}_{\frac{1}{2}}(c_{\mathtt{N}}) > \frac{1}{3} = {}_{\frac{1}{2}}00(01).$$

Montrons le d'abord quand $c \geq 3/4 = {}_{\frac{1}{2}}011$: on écrit $c = 1/2 + c'/4$, avec $c' \geq 1$, et on pose $B = c'A/2$ dans l'argument $cA = (A + B)/2$ de la réponse 2.2.
Considérons ensuite le cas $c > 1/3$; dans toute rbs de c, il y a nécessairement deux chiffres consécutifs tels que : $c_k = c_{k+1} = 1$, et $c_{\mathtt{N}} c_{bn+1} = 0$ pour $\mathtt{N} < k$. Par l'algorithme de multiplication qui précède, on peut décomposer $A \times {}_{\frac{1}{2}}c_0 \cdots c_{k-2}011c_{k+2} \cdots$ en une suite d'opérations causales (A/2, (A+B)/4, -A), dont le dernier argument est le produit $A \times {}_{\frac{1}{2}}011c_{k+2} \cdots = A \times c'$. Comme $c' \geq 3/4$, nous savons qu'il n'est pas causal.

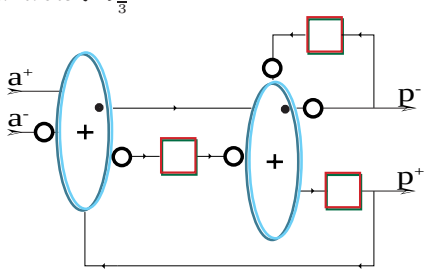
Question 4 (Diviseur série par les poids forts) *1. Réaliser un circuit de division par 3, en série par les poids forts : $P = \mathcal{M}_{\frac{1}{3}}(A) = \frac{A}{3}$.*

2. *Décrire une structure de multiplicateur par la constante $c = \frac{n}{d} \in \mathbf{Q}$. Pour quelles valeurs de c est-il réalisable ?*

Réponse 4 *1. La représentation binaire de 1/3 est :*

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3}) = {}_{\frac{1}{2}}0(01).$$

On a donc $P = \frac{A}{3} = \frac{1}{4}(A + \frac{A}{3}) = \mathcal{S}(A, P)$, *ce qui amène le circuit suivant de division par trois* $\mathcal{M}_{\frac{1}{3}}$ *:*



2. Le Multiplicateur $\mathcal{M}_c$ *par la constante* c *est causal si* $|c| \leq \frac{1}{3}$. *Un nombre rationnel* $c = \frac{n}{d}$ *admet une rbsn qui est* ultimement périodique *:*

$$c = \frac{n}{d} = {}_{\frac{1}{2}}c_0 \cdots c_{i-1}(c_i \cdots c_{i+p-1}),$$

où $i \in \mathbf{N}$ *est la longueur de la partie initiale,* $p \in \mathbf{N}$ *est la longueur de la partie périodique, et* $c_0 = c_1 = c_{\mathbf{N}}c_{\mathbf{N}+1} = 0$. *Quitte à allonger la partie initiale, on peut supposer* $c_{i+p-1} = 0$. *Reprenons les équations de la multiplication égyptienne, à une substitution près de la condition initiale :*

$$\begin{aligned} P_{i+p-1} &= \frac{P_i}{2}, \\ P_k &= c_k A + \frac{P_{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

Le multiplicateur résultant a la même structure que le multiplicateur par le nombre dyadique $c = \frac{n}{d} = {}_{\frac{1}{2}}c_0 \cdots c_{i-1}c_i \cdots c_{i+p-1}$, *sauf que l'entrée de la tranche finale* $i + p - 1$ *reprend la sortie de la tranche* i, *pour former une boucle en retour* - feedback.

Question 5 (Algorithme de calcul d'une *rbs***)** *Soit* $R \in [-2, 2]$ *un nombre réel, défini par deux applications rationnelles* calculables $g, d \in \mathbf{N} \mapsto \mathbf{Q}$ *telles que :*

(i) $-2 \leq g(0) < \cdots < g(\mathbf{N}) < g(\mathbf{N}+1) < \cdots < d(\mathbf{N}+1) < d(\mathbf{N}) < \cdots < d(0) \leq 2$

(ii) $\forall \mathbf{N} \in \mathbf{N}$ *:* $d(\mathbf{N}) - g(\mathbf{N}) < 2^{1-\mathbf{N}}$.

Il résulte directement de (i) et (ii) que :

$$R = \lim_{\mathbf{N} \mapsto \infty} g(\mathbf{N}) = \lim_{\mathbf{N} \mapsto \infty} d(\mathbf{N}).$$

Donner un algorithme de calcul d'une rbs de R *:*

$$R = {}_{\frac{1}{2}}r_0r_1\cdots r_{\mathrm{N}}\cdots = \sum r_{\mathrm{N}}2^{-\mathrm{N}},$$

avec $r_{\mathrm{N}} \in \{\bar{1}, 0, 1\}$.

Réponse 5 *Posons* $R_0 = R, g_0 = g, d_0 = d$ *et calculons, de proche en proche pour* $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$, *la suite des réels calculables* $R_{\mathrm{N}} = g_{\mathrm{N}}(\infty) = d_{\mathrm{N}}(\infty)$, *donnés par les fonctions rationnelles* $g_{\mathrm{N}}, d_{\mathrm{N}} \in \mathbf{N} \mapsto \mathbf{Q}$ *qui satisfont (i) et (ii), tels que :*

$$R = {}_{\frac{1}{2}}r_0r_1\cdots r_{\mathrm{N}-1} + 2^{-\mathrm{N}}R_{\mathrm{N}}.$$

Par (ii), on a $d_{\mathrm{N}}(1) - g_{\mathrm{N}}(1) < 1$ *et trois cas se présentent :*

1. $g_{\mathrm{N}}(1) < -1$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = \bar{1}$;
2. $-1 \leq g_{\mathrm{N}}(1) < d_{\mathrm{N}}(1) \leq 1$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = 0$;
3. $1 < d_{\mathrm{N}}(1)$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = 1$.

On pose alors $R_{\mathrm{N}+1} = 2(R_{\mathrm{N}} - r_{\mathrm{N}})$ *et on vérifie, dans les trois cas, que* $-2 \leq R_{\mathrm{N}+1} \leq 2$. *Pour tout entier* $k \in \mathbf{N}$, *définissons alors :* $g_{\mathrm{N}+1}(k) = 2(g_{\mathrm{N}}(k+1) - r_{\mathrm{N}})$, *et* $d_{\mathrm{N}+1}(k) = 2(d_{\mathrm{N}}(k+1) - r_{\mathrm{N}})$. *On a* $g_{\mathrm{N}+1}(k) < 2(g_{\mathrm{N}}(k+2) - r_{\mathrm{N}}) = g_{\mathrm{N}+1}(k+1)$, *et* $d_{\mathrm{N}+1}(k) > d_{\mathrm{N}}(k+1)$. *Donc,* $g_{\mathrm{N}+1}, d_{\mathrm{N}+1}$ *vérifient (i). Comme* $d_{\mathrm{N}+1}(k) - g_{\mathrm{N}+1}(k) = 2(d_{\mathrm{N}}(k+1) - g_{\mathrm{N}}(k+1)) < 2 \times 2^{-k} = 2^{1-k}$, *on a aussi (ii).*

Question 6 (Représentation binaire signée *normale* : *rbsn*)

1. *Montrer qu'il existe (sous des hypothèses que l'on précisera) une représentation* normale *rbsn du nombre réel*

   $$R = {}_{\frac{1}{2}}r_0r_1\cdots r_{\mathrm{N}}\cdots = \sum r_{\mathrm{N}}2^{-\mathrm{N}},$$

   dans laquelle le chiffre $r_{\mathrm{N}+1}$ *suivant tout chiffre* $r_{\mathrm{N}} \in \{\bar{1}, 1\}$ *non nul est nul :* $r_{\mathrm{N}}r_{\mathrm{N}+1} = 0$ *pour tout* $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$.
   Exemple : $\frac{11}{16} = {}_{\frac{1}{2}}10\bar{1}0\bar{1}$.
2. *Décrire l'algorithme de calcul de la rbsn d'un nombre rationnel :* $R = \frac{n}{d} \in \mathbf{Q}$. *Caractériser les suites de chiffres obtenues.*
3. *La rbsn est elle unique ?*
4. *Considérons un circuit* normaliseur *: son entrée est une rbs de R, sa sortie une rbsn. S'il en existe un, le construire. Sinon, montrer pourquoi !*

Réponse 6 *1. Pour qu'il existe une rnbs, il est nécessaire que* $|R| \leq \frac{4}{3} = {}_{\frac{1}{2}}(10)$. *Pour montrer que cette condition est aussi suffisante, posons* $R_0 = R$ *et calculons de proche en proche, pour* $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$, *la suite des chiffres* r_{N} *de*

$$R = {}_{\frac{1}{2}}r_0r_1\cdots r_{\mathrm{N}-1} + 2^{-\mathrm{N}}R_{\mathrm{N}}.$$

Trois cas principaux se présentent :

(a) $R_{\mathrm{N}} < -\frac{2}{3}$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = \bar{1}$;
(b) $-\frac{2}{3} < R_{\mathrm{N}} < \frac{2}{3}$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = 0$;
(c) $R_{\mathrm{N}} > \frac{2}{3}$: *choisir* $r_{\mathrm{N}} = 1$.

Pour les valeurs $R = \pm\frac{2}{3}$ *non traitées, le choix* $r_{\mathrm{N}} \in \{0, 1, \bar{1}\}$ *est* arbitraire *:* $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(01) = \frac{1}{2}1(0\bar{1})$.

Dans tous les cas, posons $R_{\mathrm{N}+1} = 2(R_{\mathrm{N}} - r_{\mathrm{N}})$ *et vérifions que :* $|R_{\mathrm{N}+1}| \leq \frac{4}{3}$. *Pour* $r_{\mathrm{N}} \neq 0$, *on trouve la condition plus forte* $|R_{\mathrm{N}+1}| \leq \frac{2}{3}$, *qui implique* $r_{\mathrm{N}+1} = 0$, *et donc la condition de normalisation :* $r_{\mathrm{N}} r_{\mathrm{N}+1} = 0$.

2. *La représentation rbsn d'un nombre rationnel* $R = \frac{n}{d} \in \mathbf{Q}$ *tel que* $|R| \leq \frac{4}{3}$ *est* ultimement périodique *:*

$$R = \frac{n}{d} = \tfrac{1}{2} r_0 \cdots r_{i-1}(r_i \cdots r_{i+p-1}).$$

On cherche la période en testant, dans l'algorithme de la question précédante, si chaque nouveau nombre $R_{\mathrm{N}+1}$ *est égal à l'un des* R_k *déjà calculés pour* $k < \mathrm{N} + 1$. *Quand* $R \in Q$ *est un nombre rationnel, ce test est possible car tous les* $R_{\mathrm{N}} \in \mathbf{Q}$ *sont aussi des nombres rationnels. La période est identifiée et l'algorithme termine, quand on trouve :*$R_{p+i} = R_i$.

3. *La rbsn est elle unique ? Non, puisque :* $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(01) = \frac{1}{2}1(0\bar{1}) = 1 - \frac{1}{3}$. *Les nombres de la forme* $R = \pm\frac{2^{-\mathrm{N}}}{3}$ *- c'est à dire ceux dont la représentation binaire usuelle est ultimement périodique, de période (01) - ont donc* deux *rbsn. Pour les autres nombres réels, la rbsn est* unique.

4. *Soit* C *un nombre réel calculable* arbitraire *tel que* $|C| < \frac{2}{3}$. *Le premier chiffre de la rbsn de* $C + \frac{2}{3}$ *vaut :* 0 *si* $C < 0$, *et 1 si* $C > 0$ *; les deux choix sont possibles quand* $C = 0$. *Un circuit* normaliseur *permettrait donc de décider, en en temps fini, entre* $C \leq 0$ *et* $C \geq 0$. *Le cours montre que cette question est* indécidable, *pour* C *calculable arbitraire. Il n'existe donc pas de circuit* normaliseur.

Question 7 (Entropie de la *rbsn***)** *Soit* R *un réel aléatoire, résultant d'un tirage uniforme sur l'intervalle* $-1 < R < 1$. *On en considère une (la ?) rbsn :*

$$R = \tfrac{1}{2} r_0 r_1 \cdots r_{\mathrm{N}} \cdots = \sum r_{\mathrm{N}} 2^{-\mathrm{N}},$$

avec $r_{\mathrm{N}} r_{\mathrm{N}+1} = 0$ *pour tout* N.

1. *Calculer les probabilités des trois symboles de* R *:* $r_{\mathrm{N}} \in \{\bar{1}0, 0, 10\}$.
2. *Calculer l'entropie* $H = \sum_{s \in \{\bar{1},0,1\}} Pr(s) log_2 \frac{1}{Pr(s)}$ *de cette source.*
3. *Montrer qu'il existe un code binaire* optimal *de* R, *de longueur moyenne* égale à l'entropie H.
4. *Quel est le nombre moyen des chiffres non nuls de* R *:* $Pr(r_{\mathrm{N}} \neq 0)$ *?*

Réponse 7 *1. Comme le tirage est* uniforme *sur* $[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$ *la probabilité de chaque symbole* $r_{\mathrm{N}} \in \{\bar{1}0, 0, 10\}$ *est proportionnelle à la longueur de l'intervalle correspondant, divisée par* $8/3$, *soit :* $Pr(0) = 1/2$, *et* $Pr(1) = Pr(\bar{1}) = 1/4$.

2. *L'entropie vaut :* $H = -log_2(1/2)/2 - log_2(1/4)/4 - log_2(1/4)/4 = 1.5\ Sh.$

3. *La longueur moyenne* $m = l(0)/2 + l(10)/4 + l(\bar{1}0)/4$ *du code* $c(0) = 0, c(10) = 10,\ c(\bar{1}0) = 11$ *est égale à l'entropie :* $m = H = 1.5$.

4. *Partons d'une suite binaire* $S = s_0 \cdots s_{l-1}$ *de longueur* $l \in \mathbf{N}$, *qui soit aléatoire équiprobable :* $Pr(s_k = 0) = Pr(s_k = 1) = \frac{1}{2}$. *On obtient une suite aléatoire* $R_{\mathrm{N}} = r_0 \cdots r_{\mathrm{N}-1}$ *de* N *chiffres* $r_k \in \{\bar{1}, 0, 1\}$, *en substituant dans* S *chaque bit non nul* $s_k = 1$ *par les chiffres* 10 *ou* $\bar{1}0$, *au hasard équiprobable. La longueur moyenne de* R *est donnée par* $\mathrm{N} = l \times (Pr(0) + 2Pr(10) + 2Pr(\bar{1}0)) = 3l/2$. *Le nombre moyen de chiffres non nuls de* R *est donc :* $Pr(r_{\mathrm{N}} \neq 0) = \mathrm{N}/3$.

   Avec un peu de travail, on peut préciser cette réponse. Soit $\mathcal{R}_{\mathrm{N}}$ *l'ensemble des nombres réels dont tous les chiffres de la rbsn sont nuls, à partir du rang* N. *Comme cette rbsn commence forcément par* 0, 10 *ou* $\bar{1}0$, *la taille* $R_{\mathrm{N}} = |\mathcal{R}_{\mathrm{N}}|$ *de cet ensemble est donnée par :* $R_0 = 1$, $R_1 = 3$ *et* $R_{\mathrm{N}+2} = R_{\mathrm{N}+1} + 2R_{\mathrm{N}}$.
   La série génératrice $R(z) = \sum R_{\mathrm{N}} z^{\mathrm{N}}$ *est solution de l'équation :*
   $R(z) - 1 - 3z = z(R(z) - 1) + 2z^2 R(z)$, *soit :*

$$R(z) = \frac{1 + 2z}{1 - z - 2z^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{1 - 2z} - \frac{1}{1 + z}\right).$$

   En développant, on trouve la formule explicite :

$$R_{\mathrm{N}} = \frac{1}{3}(2^{\mathrm{N}+2} - (-1)^{\mathrm{N}}).$$

   Soit U_{N} *le nombre de chiffres non nuls, dans l'écriture rbsn des nombres dyadiques* $r \in \mathcal{R}_{\mathrm{N}}$. *On a :* $U_0 = 0$, $U_1 = 2$ *et* $U_{\mathrm{N}+2} = U_{\mathrm{N}+1} + U_{\mathrm{N}} + 2R_{\mathrm{N}}$. *La série génératrice* $U(z) = \sum U_{\mathrm{N}} z^{\mathrm{N}}$ *est solution de l'équation :* $U(z) - 2z = zU(z) + z^2 U(z) + 2z^2 R(z)$, *soit :*

$$U(z) = \frac{2z}{(1 - z - 2z^2)^2} = \frac{2z}{27}\left(\frac{20 - 16z}{(1 - 2z)^2} + \frac{7 + 4z}{(1 + z)^2}\right).$$

   En développant, on trouve la formule explicite :

$$U_{\mathrm{N}} = \frac{2}{27}((3\mathrm{N} + 2)2^{\mathrm{N}+1} - (3\mathrm{N} + 4)(-1)^{\mathrm{N}}).$$

   Le nombre moyen de chiffres non nuls dans les rbsn de $\mathcal{R}_{\mathrm{N}}$ *est donné par :*

$$U_{\mathrm{N}}/R_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{3} + \frac{2}{9} + O(\mathrm{N}2^{-\mathrm{N}}).$$

   A la limite $\mathrm{N} \mapsto \infty$, *nous retrouvons bien :* $Pr(r_{\mathrm{N}} \neq 0) = 1/3$.