Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0

Jean-Marc Couveignes*
U. M. R. d'Algorithmique Arithmétique de Bordeaux, Université de Bordeaux
Groupe de Recherche en Complexité et Cryptographie, D.M.I., E.N.S.

21 Janvier 1993

Résumé

Les pages qui suivent comportent une méthode de calcul de fonctions de Belyi "optimales", associées à des dessins plans. Cette étude conduit à s'interroger sur la possibilité de définir une fonction de Belyi sur le corps des modules du dessin. Pour les arbres par exemple, nous montrons que c'est toujours le cas. La preuve donne une méthode pour spécifier une telle fonction. Nous donnons ensuite un exemple de dessin qui n'admet pas de fonction de Belyi sur son corps des modules. Enfin, nous étudions la question plus générale du calcul de fonctions de Belyi pour des dessins avec ou sans automorphismes et de genre 0, et en particulier, comment calculer une fonction de Belyi définie sur le corps des modules du dessin, chaque fois que c'est possible, ou sur une extension minimale dans le cas contraire. Ceci nous conduit à présenter quelques algorithmes pour la recherche de points rationnels dans des corps de genre 0.

1 Introduction

A l'heure de l'affût, soit lorsque la lumière
Précipite ses traits dans l'humide séjour,
Soit lorsque le soleil rentre dans sa carrière,
Et que, n'étant plus nuit, il n'est pas encor jour,
Au bord de quelque bois sur un arbre je grimpe,
Et, nouveau Jupiter, du haut de cet Olympe,
    Je foudroie, à discrétion,
    Un lapin qui n'y pensait guère.
Je vois fuir aussitôt toute la nation
    Des lapins, qui, sur la bruyère,
    L'œil éveillé, l'oreille au guet,
S'égayaient, et de thym parfumaient leur banquet.
    Le bruit du coup fait que la bande
    S'en va chercher sa sûreté
    Dans la souterraine cité:
Mais le danger s'oublie, et cette peur si grande
S'évanouit bientôt; je revois les lapins,
Plus gais qu'auparavant, revenir sous mes mains.

Ne reconnaît-on pas en cela les humains?

La Fontaine, *Les Lapins.*

Ce qui suit comporte 10 sections. Immédiatement après celle-ci, la deuxième est un rappel et une mise en forme assez générale des équations conduisant au calcul d'une

*. Membre de l'Option Recherche du Corps des Ingénieurs de l'Armement.

fonction de Belyi dans le cas des arbres. On notera cependant que des formules analogues existent pour un dessin quelconque. Dans la troisième section, une méthode de calcul est proposée. L'existence de fonctions de Belyi agréables pour les arbres est démontrée dans la quatrième section. La cinquième section présente un dessin dont le corps des modules est Q mais sans fonction de Belyi rationnelle sur la sphère. Cet exemple est renforcé dans la sixième section pour conduire à un dessin sans modèle rationnel sur la sphère ni sur aucune courbe de genre 0. Dans la septième section nous montrons comment calculer une fonction de Belyi pour un dessin de genre zéro sans automorphismes, définie sur son corps des modules. Dans la huitième section, nous examinons le cas des dessins dont le groupe d'automorphismes est non trivial. Nous concluons dans la neuvième section en reprenant les résultats des sections précédentes. Pour finir, la dixième section décrit les calculs effectués sous Maple V et leurs résultats. Une description du cadre théorique de ces calculs se trouve dans l'article de Leila Schneps donné en référence (voir aussi [**Birc**] et [**Bely**] bien sur).
Je la remercie d'avoir attiré mon attention sur l'esquisse d'un programme de Grothendieck ([**Grot**]) où j'ai puisé les motivations de cet article, et dont bien sûr, les pages qui suivent n'abordent qu'une infime partie.
Je remercie Henri Cohen, Hendrik W. Lenstra, Jacques Martinet, et Michel Matignon pour leurs explications, et leurs conseils. Je remercie tout particulièrement Joseph Oesterlé pour ses recommandations et ses observations. Les calculs numériques et la réduction des réseaux, si utiles dans la recherche de certaines fonctions de Belyi ont étés menés grâce aux conseils et aux programmes de mes collègues du G.R.E.C.C., Antoine Joux et Louis Granboulan que je remercie chaleureusement. Je remercie de même tous les membres de l'équipe de théorie des nombres de Bordeaux, Henri Cohen et Francine Delmer en particulier, qui ont pris goût eux aussi à ces "calculs de lapins" et dont les nombreux exemples m'ont beaucoup aidé.

2 Fonctions de Belyi des arbres.

Une fonction de Belyi est une application rationnelle Π d'une courbe $\mathcal{C}$, à valeurs dans $P_1(C)$ et ramifiée seulement au dessus de 0, 1 et ∞. On demande que Π et $\mathcal{C}$ soient définies sur $\bar{Q}$, ce qui est toujours possible, de par la rationalité des trois valeurs singulières 0, 1 et ∞. Un dessin d'enfant est un tel couple $(\mathcal{C}, \Pi)$ défini à $\bar{Q}$-isomorphismes près.
Lorsque $\mathcal{C} = P_1(C)$, l'application Π est donc définie à une homographie près (et en général à un automorphisme de $\mathcal{C}$ près).
Si on demande, de plus, que l'indice de ramification en chacun des points au dessus de 1 soit exactement 2, la fonction de Belyi et le dessin sont dits propres (*clean* en Anglais). Alors, on peut considérer l'image réciproque du segment réel $[0, 1]$ dans $P_1(C)$. On obtient un graphe connexe dont les sommets correspondent aux zéros de Π avec pour multiplicités le nombre de segments arrivant au sommet. Sur chaque segment reliant deux sommets, la fonction Π prend une et une seule fois la valeur 1. Le graphe délimite des faces (cellules) au milieux desquelles se trouve un pôle dont la multiplicité est le nombre de segments qui bordent la face.
Comme on l'a vu, nous adoptons la convention suivante : les faces sont des pôles, les sommets des zéros et les cotés des uns. Noter que ce n'est pas la convention choisie

dans [**ShVo**].
Voyons comment rechercher une fonction de Belyi associée à un *arbre propre*. On place d'abord l'unique face à l'infini, de façon à obtenir un polynôme.
On appelle α_i les sommets et ν_i leurs multiplicités pour $1 \leq i \leq N$ où N est le nombre de sommets et $d = \sum \nu_i$ le degré de la fonction de Belyi.
On obtient alors une identité du type

$$\prod_{i \in I} (X - \alpha_i)^{\nu_i} + \lambda = Q^2(X) \tag{1}$$

où I est l'ensemble des indices correspondant aux sommets et λ est un paramètre lié à la normalisation du polynôme. Les racines de Q correspondent aux arêtes de l'arbre.
On notera que le polynôme

$$\Pi = \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)^{\nu_i}$$

se factorise en

$$\Pi^+ = Q - \sqrt{\lambda} = \prod_{i \in I^+} (X - \alpha_i)^{\nu_i} \quad \text{et} \quad \Pi^- = Q + \sqrt{\lambda} = \prod_{i \in I^-} (X - \alpha_i)^{\nu_i}$$

où l'on définit I^+ comme l'ensemble des indices correspondant aux sommets α_i tels que $Q(\alpha_i) = \sqrt{\lambda}$ (et que, par exemple, on colorie en rouge) et I^- l'ensemble des indices correspondant aux sommets α_i tels que $Q(\alpha_i) = -\sqrt{\lambda}$ (et que, par exemple, on colorie en bleu). Nous pouvons ainsi considérer la fonction de Belyi comme la composée de deux revêtements: celui défini par $Q/\sqrt{-\lambda}$ et celui défini par le polynôme $X^2 + 1$. On comprend ainsi que les sommets rouges et bleus alternent le long de l'arbre, si bien qu'une fois choisie la couleur de l'un d'eux, on a déterminé celle de tous les autres.
Alors

$$\Pi = \Pi^+ \Pi^- = (Q - \sqrt{\lambda})(Q + \sqrt{\lambda})$$

Si on dérive l'identité (1) on obtient,

$$\Pi(\Sigma^+ + \Sigma^-) = 2QQ' \tag{2}$$

avec

$$\Sigma^+ = \sum_{i \in I^+} \frac{\nu_i}{X - \alpha_i} \quad , \quad \Sigma^- = \sum_{i \in I^-} \frac{\nu_i}{X - \alpha_i}$$

Comme Q est premier avec Π, on en déduit que

$$dQ = (\Sigma^+ + \Sigma^-)\Theta$$

où $\Theta = \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)$, et si l'on pose $\sigma^+ = \Sigma^+ \Theta$ et $\sigma^- = \Sigma^- \Theta$, alors

$$dQ = (\sigma^+ + \sigma^-) \tag{3}$$

On veut prouver maintenant l'identité

$$d\sqrt{\lambda} = (\sigma^+ - \sigma^-) \tag{4}$$

Pour cela, il suffit d'observer que le membre de droite est un polynôme de degré inférieur ou égal à $N-1$ et qu'il prend la valeur $d\sqrt{\lambda}$ pour les N nombres α_i. Par exemple si α_i est un sommet rouge alors $\sigma^-(\alpha_i)=0$ et donc $(\sigma^+-\sigma^-)(\alpha_i)=(\sigma^++\sigma^-)(\alpha_i)=dQ(\alpha_i)=d\sqrt{\lambda}$.
Maintenant la somme et la différence de (3) et (4) donnent

$$2\sigma^+ = d\Pi^- \text{ et } 2\sigma^- = d\Pi^+ \tag{5}$$

Ces équations ont l'avantage d'un degré plus faible et elles découplent en partie les sommets rouges et les sommets bleus. Ce sont elles que l'on peut utiliser si l'on entreprend de calculer la fonction de Belyi avec un système de calcul formel. En particulier, il est toujours possible d'éliminer quelques inconnues qui apparaissent linéairement, et deux équations sont entièrement linéaires.
On peut ainsi songer à résoudre le système obtenu en développant en X le système (5) (ou même l'équation (1) en général) et en égalant les coefficients. Les inconnues choisies sont alors les α_i ou, plus habilement, leurs fonctions de Newton. On utilise l' algorithme de réduction de bases de Grobner. Pour un dessin un tant soit peu complexe, ces techniques ne sont plus raisonnables.
Nous proposons de diviser plutôt l'équation (4) par Θ. En posant $U=1/X$ on trouve

$$\frac{d\sqrt{\lambda}U^{N-1}}{\prod_{i\in I}(1-U\alpha_i)} = \sum_{i\in I^+}\frac{\nu_i}{1-U\alpha_i} - \sum_{i\in I^-}\frac{\nu_i}{1-U\alpha_i} \tag{6}$$

et les $N-1$ premiers termes du développement donnent les équations

$$\sum_{i\in I}\bar{\nu}_i\alpha_i^k = 0 \quad \text{pour} \quad 0\leq k\leq N-2 \tag{7}$$

où $\bar{\nu}_i=\nu_i$ pour les rouges et $\bar{\nu}_i=-\nu_i$ pour les bleus.
La première de ces $N-1$ équations est triviale:

$$\sum_{i\in I}\bar{\nu}_i = 0$$

En effet, puisque les sommets rouges et bleus alternent, la somme des multiplicités rouges égale la somme des multiplicités bleus.
Il reste $N-2$ équations non triviales. L'ensemble des solutions $\Upsilon=(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ de ce système est invariant par les transformations affines de C agissant diagonalement sur C^n

$$(\Upsilon_i)_i \mapsto (A\Upsilon_i+B)_i$$

où $A, B\in C$.
Remarques

- Les équations (7) se généralisent au cas d'un dessin de genre 0 quelconque dont toutes les valences sont paires. On peut alors colorier aussi bien les faces que les sommets et affecter les multiplicités d'un signe. Si on appelle α_i les sommets et

β_j les faces, si $\bar{\nu}_i$ est la multiplicité algébrique de α_i et $\bar{\mu}_j$ celle de β_j, alors à tout sommet α_i, on associe une fonction ζ_{α_i} définie par

$$\zeta_{\alpha_i}(x) = \sum_j \bar{\mu}_j \frac{\alpha_i - \beta_j}{x - \beta_j}$$

et à toute face β_j, on associe une fonction ζ_{β_j} définie par

$$\zeta_{\beta_j}(x) = \sum_i \bar{\nu}_i \frac{\beta_j - \alpha_i}{x - \alpha_i}$$

Alors la fonction ζ_{α_i} admet un zéro d'ordre $|\bar{\nu}_i|/2 - 1$ en α_i et la fonction ζ_{β_j} admet un zéro d'ordre $|\bar{\mu}_j|/2 - 1$ en β_j.

En d'autres termes on a les deux séries d'équations suivantes:

pour tout i, et pour $0 \leq k < |\bar{\nu}_i|/2$

$$\sum_j \frac{\bar{\mu}_j}{(\beta_j - \alpha_i)^k} = 0$$

Pour tout j, et pour $0 \leq k < |\bar{\mu}_j|/2$

$$\sum_i \frac{\bar{\nu}_i}{(\alpha_i - \beta_j)^k} = 0$$

La condition de parité sur les multiplicités n'est pas restrictive. En effet, si φ est une fonction de Belyi associée à un dessin quelconque, alors la fonction ψ définie par

$$\psi = -1/4 \left(\frac{\varphi(\varphi - 1)}{\varphi - 2} \right)^2$$

est une fonction de Belyi associée à un dessin dont toutes les multiplicités sont paires au dessus de 0 et ∞ et exactement égales à deux au dessus de 1.

- Dans le cas le plus simple où l'arbre est une chaîne de longueur N, alors Π est le polynôme de Tchebitchev de degré $2N$ et (7) donne de classiques mais toujours amusantes relations sur les cosinus correspondants.

- Les équations (7) forment un système de Vandermonde à l'envers puisque ce sont les α_i que l'on cherche ici, les ν_i étant connus.

On appelle Γ la fonction de C^N dans C^{N-2} définie par les membres de gauche de (7).

$$\Gamma(\alpha_1, ..., \alpha_N) = (\sum_{i \in I} \bar{\nu}_i \alpha_i^k)_{1 \leq k \leq N-2}$$

On note que Γ et sa différentielle Γ' sont très faciles à calculer. Le rang de Γ'_Υ est le minimum de $N - 2$ et du nombre de α_i distincts.
Ces observations conduisent à la méthode numérique suivante.

3 Méthode de Newton.

Remarquons que les vecteurs de $C^N \setminus \{(z_1, z_2, ..., z_N) | z_1 = z_2 = ... = z_N\}$ définis à affinités près sont en fait des points de P_{N-2}.
A toute suite $(\Upsilon_i)_i$ de vecteurs de $C^N \setminus \{(z_1, z_2, ..., z_N) | z_1 = z_2 = ... = z_N\}$ définis à affinités près, on associe une suite de P_{N-2}. Si cette seconde suite est convergente on dira abusivement que $(\Upsilon_i)_i$ converge. Dans ce contexte, la méthode de Newton est définie par la formule de récurrence

$$\Upsilon_{i+1} = \Upsilon_i - {\Gamma'_{\Upsilon_i}}^{-1}\Gamma(\Upsilon_i) \tag{8}$$

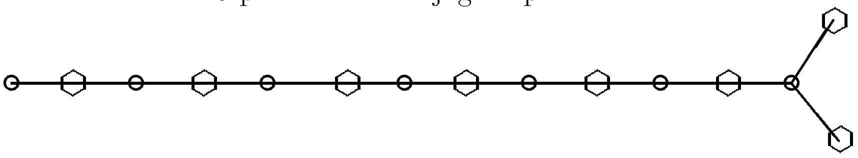
On note que Γ'_{Υ_i} n'est pas inversible. Ainsi ${\Gamma'_{\Upsilon_i}}^{-1}\Gamma(\Upsilon_i)$ est défini à un élément du noyau près. On choisi pour ${\Gamma'_{\Upsilon_i}}^{-1}\Gamma(\Upsilon_i)$ le vecteur orthogonal au noyau; autrement dit, on se déplace selon la ligne de plus grande pente.
Ici la forme quadratique à utiliser peut être définie à partir de

- la dérivée seconde de Γ en Υ_i.
- une métrique à définir sur P_{N-2}.

Pour le calcul numérique, il faut choisir un représentant convenable de Υ_i dans C^N, afin d'éviter une divergence artificielle due à un glissement le long des lignes de niveaux de Γ. Il reste maintenant à décrire une heuristique pour le calcul d'une approximation Υ_0 propre à faire converger la méthode.
On remarque d'une part que dans les dessins calculés explicitement jusqu'à présent, les segments sont presque rectilignes. Par ailleurs, les angles formés par les arêtes autour des sommets doivent être égaux. Il ne manque plus à cette description schématique qu'une évaluation de la longueur des segments. Celle-ci peut être obtenue par l'observation de dessins voisins mais plus simples. Ainsi le système (7) varie peu lorsqu'on "éclate" un point, c'est-à-dire lorsque on remplace un point de multiplicité $\bar{\nu}$ par deux points de couleurs opposées et de multiplicités $\bar{\nu}_1$ et $\bar{\nu}_2$ telles que $\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}$. Cela revient à greffer un nouveau segment sur le dessin qui pousse alors d'étape en étape comme un arbre. Si l'on appelle Υ^t la solution du premier arbre à N sommets, on peut par exemple obtenir un vecteur Υ_0^g de dimension $N+1$ en dupliquant la valeur correspondant au sommet éclaté. Ce vecteur peut être pris comme valeur de départ dans la méthode itérative pour le calcul de l'arbre greffé à $N+1$ sommets. En effet, sur les $N-1$ équations (7) correspondantes, les $N-2$ premières sont déjà satisfaites parce que ce sont les équations (7) de l'arbre précédent. On peut ainsi utiliser les longueurs de l'arbre précédent comme des approximations à celles de l'arbre greffé.
Une fois obtenue une bonne approximation de la limite Υ_∞ on a donc un élément de P_{N-2} que l'on cherche à relever dans C^N en un point défini sur un corps raisonnable. Pour cela il convient de définir une normalisation habile qui assure à priori que ce point est défini sur un domaine de rationalité aussi petit que possible. Si les approximations calculées sont assez fines, on pourra alors retrouver les diverses dépendances algébriques à l'aide de l'algorithme LLL de Lenstra, Lenstra et Lovász (cf [**LeLeLo**] et [**Joux**]). On obtiendra alors une solution formelle au problème (1).

Exemple

L'arbre en T à 15 points a 21 conjugués possibles.



Le calcul montre qu'il est en effet de degré 21. Les 21 sous-corps de $\bar{Q}$ correspondants sont engendrés par les racines du polynôme

$$\begin{aligned}
&2^{12}3^{5}5^{2}x^{21} + 1158312960\,x^{20} + 25502867712\,x^{19} + 341618429376\,x^{18} \\
&+3209936201344\,x^{17} + 20392715344064\,x^{16} + 99638796203968\,x^{15} \\
&+370504764844224\,x^{14} + 1062741483903680\,x^{13} + 2370640833511888\,x^{12} \\
&+4128644196255936\,x^{11} + 5614827771514976\,x^{10} + 5942714032340512\,x^{9} \\
&+4860315116093808\,x^{8} + 3036961695710128\,x^{7} + 1425822458726372\,x^{6} \\
&+491072052205560\,x^{5} + 119836481716252\,x^{4} + 19663328827436\,x^{3} \\
&+1993132055040\,x^{2} + 106550236828\,x + 2000024111
\end{aligned}$$

Le discriminant de ces corps, calculé avec Pari par Henri Cohen est

$$-2^{588}3^{382}5^{386}7^{61}11^{20}$$

Pour la méthode de Newton, les calculs numériques ont été menés sous Pari. Pour la recherche de dépendances algébriques avec LLL, j'ai eu recours aux conseils et aux programmes d'Antoine Joux.

4 Problèmes de rationalité

Dans cette section, nous définissons le corps des modules d'un dessin et montrons que dans le cas où le dessin est un arbre propre, il admet toujours une fonction de Belyi (un polynôme même) définie sur son corps des modules. On rappelle qu'une fonction de Belyi de genre 0, $\Pi : P_1 \to P_1$, est définie à composition à droite par une homographie près. Puisque une telle fonction peut être choisie définie sur $\bar{Q}$, on peut faire agir le groupe $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q)$ sur les coefficients de la fonction de Belyi (qui n'est autre qu'une fraction rationnelle). On obtient alors une fonction de Belyi associée à un dessin non-nécessairement égal au précédent. Cela définit une action de $Gal(\bar{Q}/Q)$ sur les dessins (on vérifie aisément que la définition donnée ne dépend pas de la fonction de Belyi choisie).
On appelle groupe des modules du dessin, le groupe des $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q)$ tels qu'il existe une homographie H_σ satisfaisant

$${}^{\sigma}\Pi = \Pi \circ H_\sigma$$

C'est le stabilisateur du dessin dans $Gal(\bar{Q}/Q)$ selon l'action décrite plus haut.
On appelle corps des modules K d'un dessin, le corps fixé par le groupe G des modules du dessin. Pour une définition plus intrinsèque voir [**Schn**].
Nous cherchons maintenant une fonction de Belyi définie sur une extension aussi petite que possible du corps K (Par définition, le corps de définition d'une fonction de Belyi

est le corps engendré par les fonctions symétriques des racines de son numérateur et de son dénominateur.) Pour cela on veut ajouter deux conditions appropriées au système (1). On va voir que dans le cas des arbres, il existe toujours une fonction de Belyi définie sur K et qu'elle peut être caractérisée par les deux conditions

$$\sigma_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_u = 1 \tag{9}$$

où σ_1 et Σ_u sont, à peu de choses près, deux fonctions symétriques bien choisies.
La première spécification est que l'unique pôle soit à l'infini. On a alors un polynôme. Deux fonctions de Belyi satisfaisant à cette condition se correspondent, on l'a vu, par une application affine (homographie fixant l'infini).
On demande ensuite que la somme σ_1 des racines de ce polynôme soit nulle, ce qui peut toujours être obtenu en composant par une translation. Deux fonctions de Belyi satisfaisant aussi à cette deuxième condition se correspondent par une application linéaire (homographie fixant l'infini et zéro):

$$z \mapsto Az$$

Considérons $\Pi(X) = \pi_P X^P + \pi_{P-2} X^{P-2} + \pi_{P-3} X^{P-3} + \ldots + \pi_0$ l'une d'entre elles et appelons e le pgcd de l'ensemble des entiers l strictement positifs tels que π_l soit non nulle.
Il existe donc une combinaison multiplicative

$$\Sigma_u = \prod_k \pi_k^{\lambda_k}$$

des coefficients de Π, qui soit homogène en A de degré e (Identité de Bezout).
On pose comme troisième condition que $\Sigma_u = 1$. Comme Σ_u est une fonction homogène de degré e de A, il existe une et une seule fonction de Belyi satisfaisant aux trois conditions. En effet, pour qu'une application linéaire $z \mapsto Az$ laisse Σ_u invariant on doit avoir $A^e = 1$, mais justement tous les coefficients non nuls de Π sont de degré un multiple de e et donc notre fonction de Belyi est elle aussi invariante si on la compose par l'application linéaire $z \mapsto Az$.
La fonction Π_0 ainsi construite est définie sur K, cela découle de son unicité.
Notons en particulier qu'il est possible de construire Π_0 à partir de n'importe quelle fonction de Belyi Π de la façon suivante:

- Si la fonction a un dénominateur, alors ce dénominateur n'a qu'une racine correspondant à l'unique pôle p. On s'en débarrasse en composant par une homographie

$$H_1(X) = \frac{pX}{X+1}$$

- Maintenant on peut annuler la somme des racines en composant par la translation

$$H_2(X) = X - \frac{\sigma}{P}$$

  où σ est la valeur initiale de cette somme.

- Pour finir on ramène à un la combinaison de fonctions symétriques Σ_u. Le degré de Σ_u est e. Soit Σ la valeur initiale de Σ_u et $\Sigma^{1/e}$ une de ses racines e-ième. On compose alors par

$$H_3(X) = \frac{X}{\Sigma^{1/e}}$$

On peut remarquer que e est le plus grand entier positif tel que $\Pi_0(X) = \widetilde{\Pi}_0(X^e)$ où $\widetilde{\Pi}$ est un polynôme. C'est aussi l'ordre de la symétrie de centre 0 qui laisse stable le dessin, ou mieux, l'ordre du groupe de symétrie du dessin.
En pratique, on peut utiliser d'autres fonctions symétriques que les π_k. Par exemple, on définit les polynômes Θ_k pour $k \in Z$ où

$$\Theta_k = \prod_{i \in I \text{ et } \bar{\nu}_i = k} (X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad \Pi^+ = \prod_{k>0} \Theta_k^k \quad \text{et} \quad \Pi^- = \prod_{k<0} \Theta_k^{-k} \tag{10}$$

Donc Θ_k a pour racines les sommets d'une couleur et multiplicité données. Les polynômes $\widehat{\Theta}_k = \Theta_k \Theta_{-k}$ sont définis sur le même corps que Π. Leurs coefficients constituent une famille de fonctions symétriques plus riche, que l'on prend comme nouvelles inconnues du problème. On choisit alors deux telles fonctions, de degré un, et on demande que l'une soit nulle et l'autre égale à un. Il y a au plus une fonction de Belyi satisfaisant ces conditions. Elle est alors définie sur le corps des modules du dessin. Ces deux conditions ajoutées peuvent simplifier grandement les calculs car elles permettent d'éliminer deux inconnues. Noter aussi que les équations (1) imposent seulement les multiplicités des points de ramification du revêtement et qu'elles sont donc vérifiées par de très nombreux dessins dont tous ne sont pas conjugués par l'action de Galois. En d'autres termes, il se peut que l'idéal correspondant au système se factorise. Dans ce cas, il vaut mieux s'en apercevoir le plus vite possible. A cette fin, on peut essayer de factoriser des combinaisons naïves des équations de départ.

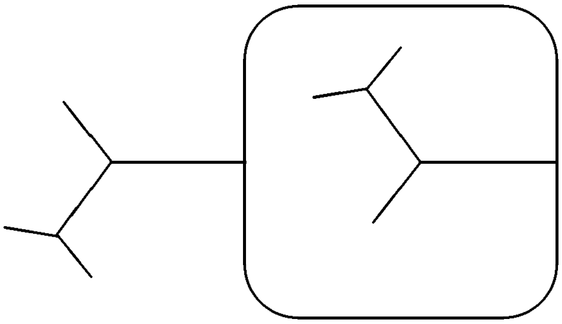
Remarques

- L'existence d'une fonction de Belyi sur le corps K est assurée dès qu'il existe un célibataire dans le dessin, c'est-à-dire un sommet ou un pôle qui soit unique par sa valence. Pour construire la fonction Π_0, il suffit alors d'envoyer ce célibataire à l'infini et de finir comme ci-dessus. Cette observation reste valable si la fonction de Belyi n'est pas propre. A vrai dire, elle l'est encore pour tout revêtement de genre 0 ramifié au dessus d'un ensemble rationnel et muni d'un célibataire.
- La question qui se pose alors est de savoir s'il existe toujours une fonction de Belyi sur le corps K des modules du dessin, même en l'absence de célibataire. La réponse est non comme on le verra ci-dessous. Cependant, l'extension nécessaire est au plus quadratique.

5 Contre-exemple

Nous donnons maintenant un exemple de dessin dont le corps des modules est Q et pour lequel il n'existe pas de fonction de Belyi de P_1 dans P_1, définie sur Q.

Le dessin proposé ne doit comporter aucun célibataire, on choisit donc un dessin à deux faces. Pour simplifier, les deux faces n'ont que deux cotés en commun. On trace donc un cercle et deux points sur ce cercle. A partir de chacun de ces deux points on dessine deux arbres "conjugués" c'est-à-dire ayant la même liste de valences. Et voilà une famille de candidats contre-exemples.
Après quelques essais infructueux (certains dessins étaient trop complexes pour être explicitement calculés, d'autres, trop simples pour conduire à une obstruction) j'ai mené à leur terme les calculs correspondant au dessin suivant.



On remarque que ce dessin admet une bicoloration. Il comporte 6 sommets de valence 3, 6 sommets de valence 1 et deux faces de valence 12.
Pour les calculs, les deux pôles sont envoyés en zéro et l'infini. On exige en outre que la somme de tous les sommets de multiplicité 3 soit égale à 1.
On appelle $\widehat{\Theta}_1$ et $\widehat{\Theta}_3$ les polynômes de degré 6 définis par $\widehat{\Theta}_1 = \Theta_1\Theta_{-1}$ et $\widehat{\Theta}_3 = \Theta_3\Theta_{-3}$ avec les notations de (10). L'équation (1) est alors

$$\widehat{\Theta}_1\widehat{\Theta}_3^3 + \lambda X^{12} = Q^2(X) \tag{11}$$

Les calculs sont menés formellement comme décrits au paragraphe 10. On obtient comme attendu, deux fonctions de Belyi distinctes et conjuguées par l'action de Galois. Il se trouve qu'elles sont définies sur $Q(i)$ et conjuguées. Appelons les $\Pi = \lambda^{-1}X^{-12}\widehat{\Theta}_1\widehat{\Theta}_3^3$ et $\bar{\Pi}$ où l'on note en surlignant la conjugaison dans $Q(i)$. On trouve que

$$\bar{\Pi} = \Pi \circ H \text{ où } H(X) = \frac{A}{X} \text{ et } A = \frac{-1}{4100}$$

Cela prouve que le corps des modules du dessin est Q. Une homographie peut être définie (à multiplication par une constante près) par une matrice 2×2. Nous choisissons ici de poser

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons aussi que le groupe des automorphismes de Π, i.e. l'ensemble des homographies H telles que

$$\Pi \circ H = \Pi$$

est trivial. En effet une telle homographie devrait soit fixer les pôles soit les inverser. Si elle les fixe alors c'est une application linéaire et donc triviale à cause de la normalisation adoptée. Si elle permute les pôles elle est de la forme $X \mapsto C/X$ et c'est une inversion de centre 0. Mais une telle inversion ne respecte pas le dessin. Graphiquement on voit que les petites fourchettes ont bougé. Celle qui s'élevait est abaissée et celle qui s'abaissait est relevée (selon les paroles de l'Évangile...)

Supposons maintenant qu'il existe une fonction de Belyi Π_Q définie sur le corps Q. Soit H_Q l'homographie telle que

$$\Pi_Q = \Pi \circ H_Q \tag{12}$$

On va montrer que H_Q peut être représentée par une matrice définie sur $Q(i)$.
On représente d'abord H_Q par une matrice quelconque de $\bar{Q}$. Ainsi on peut faire agir $Gal(\bar{Q}/Q)$ sur H_Q par action sur les coefficients.
Soit donc $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q(i))$. L'action de σ sur (12) donne

$$\Pi_Q = \Pi \circ H_Q^\sigma$$

puisque Π_Q et Π sont définies sur $Q(i)$. On en déduit que

$$\Pi = \Pi \circ H_Q^\sigma \circ H_Q^{-1}$$

et donc $H_Q^\sigma \circ H_Q^{-1}$ est l'identité en tant qu' homographie. En tant que matrice, c'est une constante.

$$H_Q^\sigma = H_Q \delta(\sigma)$$

On voit, en faisant à nouveau agir $Gal(\bar{Q}/Q(i))$ sur cette dernière équation que δ satisfait à la condition de cocycle.

$$\delta(\tau\sigma) = \delta(\tau)^\tau \delta(\sigma)$$

Le théorème 90 de Hilbert assure alors que l'on peut définir H_Q sur $Q(i)$ en divisant par une constante Δ appropriée (celle telle que $\delta(\sigma) = \Delta^{-1\sigma}\Delta$).
Il reste maintenant à faire agir sur (12) la conjugaison ordinaire de $Q(i)/Q$.

$$\Pi_Q = \bar{\Pi} \circ \bar{H}_Q = \Pi \circ H \circ \bar{H}_Q$$

Parce que le groupe d'automorphismes de Π est trivial, on en déduit l'existence d'une constante $\beta \in Q(i)$ telle que

$$H_Q = \beta H \circ \bar{H}_Q$$

En conjuguant cette égalité on obtient

$$\bar{H}_Q = \bar{\beta}\bar{H} \circ H_Q$$

puis

$$\bar{H}_Q = \bar{\beta}\beta\bar{H} \circ H \circ \bar{H}_Q$$

et donc

$$\beta\bar{\beta} = \frac{1}{A} = -4100$$

Or toutes les normes sont positives dans $Q(i)$. Contradiction.
On a donc prouvé le

Fait 1 *Le dessin défini par la fonction* Π *n'admet pas de fonction de Belyi rationnelle sur la droite projective.*

On peut même reprendre le raisonnement précédent avec un corps quelconque K_0. Une fonction de Belyi pour le dessin considéré ici, peut être définie sur un tel corps si et seulement s'il existe deux éléments x et y dans K_0 tels que $x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{1}{A}$.
Dans le cas où de tels x et y existent, on peut prendre pour matrice de passage

$$H_Q = \begin{bmatrix} a & b \\ \beta\bar{a} & \beta\bar{b} \end{bmatrix}$$

où $\beta = x + iy$, a et b sont dans $K_0(i)$ et la barre dénote la conjugaison dans $K_0(i)/K_0$
Puisque 4100 est une norme dans $Q(i)$ on peut remplacer -4100 par -1 et obtenir ainsi le

Fait 2 *Le dessin défini par la fonction* Π *admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann, définie sur un corps* K_0 *si et seulement s'il existe deux éléments* x *et* y *dans* K_0 *tels que* $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = -1$

Cependant, puisque le dessin n'a pas d'automorphisme, le critère de descente de Weil, que l'on examinera plus en détail au paragraphe 7.2, implique l'existence d'un modèle défini sur Q pour ce dessin, c'est à dire, une courbe de genre 0 définie sur Q et une fonction de Belyi de cette courbe dans le plan projectif, définie sur Q elle aussi. Or, toute courbe sur Q, de genre zéro est isomorphe sur Q à une conique plane. On cherche donc une fonction de Belyi rationnelle définie sur une conique rationnelle et satisfaisant aux conditions de ramifications du dessin proposé.
Dans la suite de cette section, on utilisera des coordonnées projectives. Soit donc une conique $\mathcal{C}$ de P_2 d'équation en $[U, V, W]$

$$E(U, V, W) = aU^2 + 2bUV + cV^2 + dUW + eVW + fW^2 = 0$$

où $a, b, c, d, e, f \in Q$.
Tout isomorphisme de $\mathcal{C}$ sur P_1 peut se mettre sous la forme suivante où $[X, Y]$ sont les coordonnées projectives sur P_1

$$[X,Y]=[N(U,V,W),D(U,V,W)]=[n_1U+n_2V+n_3W,d_1U+d_2V+d_3W]$$

où $n_1,n_2,n_3,d_1,d_2,d_3\in\bar{Q}$.
Supposons que N et D sont définis sur $Q(i)$ et que l'équation de $\mathcal{C}$ est

$$E(U,V,W)=N\bar{N}-AD\bar{D} \tag{13}$$

où $A=\frac{-1}{4100}$
On appelle $\Pi(X,Y)$, la version homogène de la fonction de Belyi Π déjà calculée. Alors,

$$\bar{\Pi}[X,Y]=\Pi[AY,X]$$

Si on compose Π et l'isomorphisme défini plus haut on obtient une fonction de Belyi Π_0 sur la conique

$$\Pi_0(U,V,W)=\Pi[N(U,V,W),D(U,V,W)]$$

On voit alors que Π_0 est rationnelle. En effet

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_0(U,V,W) &= \bar{\Pi}[\bar{N}(U,V,W),\bar{D}(U,V,W)]=\Pi[A\bar{D},\bar{N}]=\Pi[AD\bar{D},\bar{N}D]\\ &= \Pi[\bar{N}N,\bar{N}D]=\Pi[N,D]\end{aligned}$$

et on a utilisé l'équation de la courbe pour substituer $N\bar{N}$ à $AD\bar{D}$.
Il est donc possible d'obtenir des fonctions de Belyi rationnelles sur toutes les coniques de la forme donnée en (13). Ces coniques sont deux à deux isomorphes et le procédé de construction adopté n'est autre que celui décrit dans [**Weil**].

6 Contre-exemple, suite...

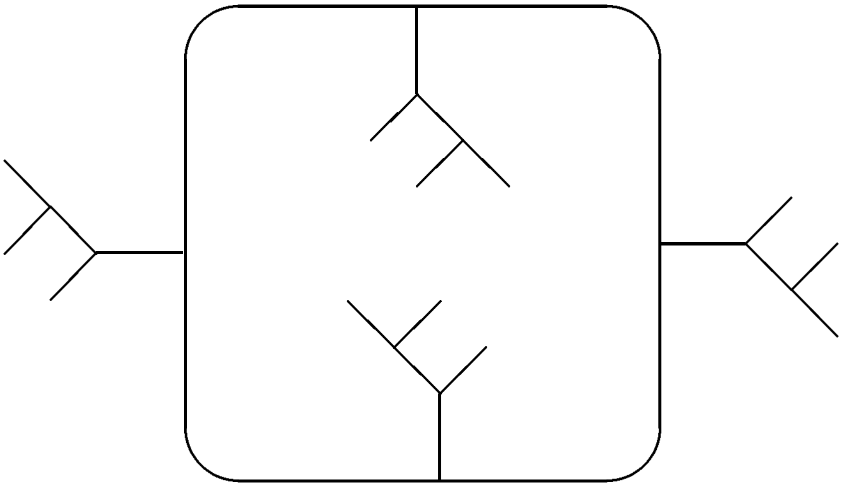
Comme on vient de le voir, le dessin précédent admet une fonction de Belyi rationnelle sur une conique. On remarque que A intervient dans l'équation de cette conique. Or A est rationnel, ce qui est lié à la trivialité du groupe d'automorphismes du dessin.
En effet, considérons la fonction de Belyi $\Psi(X)=\Pi(X^2)$ obtenue en composant Π avec un revêtement à deux feuillets de la sphère, ramifié au dessus des deux faces 0 et l'infini

$$X\mapsto X^2$$

Le dessin correspondant admet un automorphisme non trivial

$$X\mapsto -X$$

Voici ce dessin



On remarque tout de suite que Ψ est définie sur $Q(i)$ et que

$$\bar{\Psi}(X) = \Psi(\frac{\sqrt{A}}{X}) = \Psi \circ K$$

où on a posé

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc le dessin est rationnel, son corps des modules est Q. Cependant on notera que $\sqrt{A}$ n'est pas rationnel, si bien que le procédé de descente présenté au paragraphe précédent ne fonctionne plus. On devine alors que ce dessin n'admet aucun modèle rationnel.
En voici une preuve.
Supposons qu'il existe une courbe C_2 de genre 0 et une fonction de Belyi Ψ_0 sur C_2, toutes deux définies sur Q. Soit aussi (C_1, Π_0) un modèle défini sur Q pour le dessin sans automorphisme associé à la fonction Π. Un tel modèle a été construit au paragraphe précédent. Soit enfin χ l'unique application qui fasse commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[dr, "\chi"] \arrow[dd, "\Psi_0"'] & \\
& C_1 \arrow[dl, "\Pi_0"] \\
P_1 &
\end{tikzcd}$$

Puisque χ est unique (Π_0 n'a pas d'automorphismes), elle est définie sur Q. On en déduit l'existence d'un revêtement Galoisien de degré deux, de la courbe C_1 par la courbe C_2, défini sur Q. La contradiction vient alors du théorème suivant, que l'on démontrera au paragraphe 7.1.

Théorème 1 *Soient C_1 et C_2 deux courbes de genre* 0 *et χ un revêtement de C_1 par C_2 topologiquement isomorphe à l'application de P_1 dans P_1 définie par le polynôme*

$X \to X^e$ où e est un entier naturel. On suppose que C_1, C_2 et χ sont définis sur un corps de nombres K. Alors:

- *Si e est pair, C_1 est isomorphe sur K à P_1.*
- *Si e est impair, C_1 est isomorphe sur K à C_2.*

Dans notre cas, C_1 ne peut être isomorphe à P_1, comme on l'a vu au précédent paragraphe.
On a donc montré le

Fait 3 *Le dessin représenté plus haut n'admet pas de modèle rationnel.*

On peut finir en énonçant le

Fait 4 *Pour tout corps de nombre K_0, les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- *Il existe, définie sur K_0, une fonction de Belyi pour le dessin correspondant à Ψ.*
- *L'équation*

  $$x^2 + y^2 = -1$$

  admet une solution sur K_0 .

7 Descente de Weil et courbes de genre 0

Dans cette section on s'intéresse aux dessins de genre 0 et sans automorphismes. Nous verrons le résultat suivant

Fait 5 *Un dessin de genre 0 et sans automorphismes admet une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann, définie sur une extension au plus quadratique de son corps des modules. Une telle fonction peut être calculée par de simples manipulations polynômiales.*
Ensuite, pour savoir s'il existe une fonction de Belyi à coefficients dans le corps des modules, il suffit de calculer un symbole de Hilbert global. Dans le cas ou une telle fonction existe, son calcul se réduit à la résolution d'une équation aux normes de degré 2 sur le corps des modules du dessin.

On a vu que la trivialité du groupe d'automorphismes implique l'existence d'une fonction de Belyi sur une conique. Puisque toute conique est isomorphe à la droite sur une extension au plus quadratique de son corps de définition, on en déduit qu'il existe pour ce dessin une fraction rationnelle définie sur une telle extension.
Nous donnons ici une construction explicite de cette fonction de Belyi. D'autre part, cette approche ne nous laisse pas tout a fait sans recours lorsque le dessin admet des automorphismes, comme on le verra dans la section suivante.
On s'intéresse ici exclusivement au problème de descente et donc on suppose connue une fonction de Belyi associée au dessin, ainsi que le corps des modules de ce dessin.
On verra comment obtenir tout cela en 8.

La suite de cette section consiste en trois parties. Dans la première, nous rappelons quelques faits élémentaires classiques sur les courbes de genre 0. Dans la seconde partie, nous nous intéressons au calcul explicite de bons modèles pour un dessin donné, sans automorphismes. Dans la troisième, nous décrivons quelques techniques utiles à la recherche de points rationnels dans les corps de genre 0.

7.1 Une famille rationnelle de coniques à deux points marqués

Soit K un corps de nombres, C une courbe de genre 0 définie sur K et $\{\alpha, \beta\}$ une paire de points, définie sur K. On appelle $K(\sqrt{D})$ l'extension au plus quadratique de K sur laquelle α et β sont des points rationnels. Soit I_1 un isomorphisme de C sur P_1 qui envoie α sur 0 et β sur ∞. Deux tels isomorphismes sont égaux à composition près par une application de la forme $X \to \mathcal{A}X$ où $\mathcal{A} \in \bar{Q}$. On en déduit, à l'aide du théorème 90 de Hilbert, que I_1 peut être définie sur $K(\sqrt{D})$.
Supposons que D n'est pas un carré parfait et faisons agir sur I_1 l'unique automorphisme non trivial de $K(\sqrt{D})/K$. Il existe $A \in K$ tel que

$$\bar{I}_1 = A/I_1$$

Soit maintenant $\mathcal{C}$ la conique plane d'équation homogène

$$x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$$

et J_2 l'application de P_1 dans $\mathcal{C}$ définie par

$$J_2([U, V]) = [\sqrt{D}(U^2 + AV^2), AV^2 - U^2, 2UV\sqrt{D}]$$

Alors, si l'on pose $J_2^{(-1)} = I_2$ on a $I_2([x, y, z]) = [x - y\sqrt{D}, z] = [Az, x + y\sqrt{D}]$ et $\bar{I}_2 = A/I_2$ si bien que $J = J_2 \circ I_1$ est définie sur K.
De plus, J envoie la paire $\{\alpha, \beta\}$ sur la paire de points à l'infini de $\mathcal{C}$.
On en déduit le

Théorème 2 *Toute conique privée de deux points est isomorphe sur son corps de définition à une courbe affine d'équation $x^2 - Dy^2 - A = 0$.*
De plus, la courbe projective d'équation $x^2 - Dy^2 - z^2 = 0$ est isomorphe à une droite, et si le quotient A_1/A_2 est une norme dans $K(\sqrt{D})$, alors les courbes affines d'équations $x^2 - Dy^2 - A_1 = 0$ et $x^2 - Dy^2 - A_2 = 0$ sont isomorphes.

Une première conséquence de ceci est que tout dessin de genre 0, sans automorphisme, admet sur son corps des modules K, une fonction de Belyi définie sur une conique d'équation $x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$; ou bien encore une fonction de Belyi φ de P_1 dans P_1 définie sur $K(\sqrt{D})$ et satisfaisant $\bar{\varphi} = A/\varphi$, avec $A, D \in K$.
Nous donnons maintenant une preuve du théorème 1.
On peut supposer que les deux courbes C_1 et C_2 ont pour équations respectives $x^2 - D_1y^2 - A_1z^2 = 0$ et $x^2 - D_2y^2 - A_2z^2 = 0$; que les points singuliers de χ sont les points à l'infini de C_2; et qu'ils sont envoyés par χ sur les points à l'infini de C_1.

Appelons I_1 l'application de C_1 dans P_1 définie par $I_1([x,y,z]) = [x - y\sqrt{D_1}, z] = [A_1 z, x + y\sqrt{D_1}]$ et de même I_2. Notons que l' application I_1 (respectivement I_2) est définie sur K ou sur une extension quadratique de K. Dans ce dernier cas, elle a pour conjuguée A_1/I_1 (respectivement A_2/I_2). Soit alors ζ l'unique application qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "I_2"] \arrow[d, "\chi"'] & P_1 \arrow[d, "\zeta"] \\ C_1 \arrow[r, "I_1"] & P_1 \end{tikzcd}$$

On voit que ζ est ramifiée au dessus de 0 et ∞ elle est donc de la forme $\zeta(X) = \theta X^e$ ou $\zeta(X) = \theta/X^e$ avec $e \neq 0$ et $\theta \neq 0$. Notons que si C_1 et C_2 sont isomorphes à P_1, alors le théorème est démontré. On peut donc supposer que l'une au moins des deux applications I_1 et I_2 n'est pas définie sur K. Ainsi, quitte à remplacer I_1 ou I_2 par sa conjuguée, on peut toujours supposer que ζ est de la forme $\zeta(X) = \theta X^e$.
On en déduit que $\sqrt{D_1}$ et $\sqrt{D_2}$ engendrent le même corps. En effet, dans le cas contraire, considérons σ l'automorphisme tel que ${}^\sigma\sqrt{D_1} = \sqrt{D_1}$ et ${}^\sigma\sqrt{D_2} = -\sqrt{D_2}$. On trouve alors, en faisant agir σ sur le diagramme commutatif ci-dessus que ${}^\sigma\zeta(X) = {}^\sigma\theta X^e = \theta A_2^e/X^e$, ce qui n'est pas possible.
Ainsi, $\sqrt{D_1}$ et $\sqrt{D_2}$ engendrent le même corps. Soit donc σ l'automorphisme non trivial de $K(\sqrt{D_1})/K$. En faisant agir σ sur le diagramme commutatif on obtient la relation

$${}^\sigma\theta\theta = \frac{A_1}{A_2^e}$$

Si e est pair, on obtient que A_1 est une norme sur $K(\sqrt{D_1})$ et donc que C_1 est isomorphe à une droite.
Si e est impair, on obtient que A_1/A_2 est une norme sur $K(\sqrt{D_1})$ et donc que C_1 est isomorphe à C_2. CQFD.

7.2 Descente de Weil pour les fonctions de Belyi

Venons en à la deuxième partie de notre exposition. Nous voulons, pour tout dessin $\mathcal{D}$ sans automorphismes, trouver une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann à coefficients sur le corps des modules K de $\mathcal{D}$, ou bien, une fonction de Belyi sur la sphère de Riemann à coefficients sur une extension quadratique de K.
Supposons connus le corps des modules K du dessin et une famille de fonctions de Belyi conjuguées φ_i pour $1 \leq i \leq e$ définies sur des extensions L_i de degré e de K.
Nous verrons en 8 comment les obtenir.
Pour i et j compris entre 1 et e, φ_i et φ_j définissent le même dessin et il existe donc une homographie $T_{j,i}$ telle que

$$\varphi_i = \varphi_j \circ T_{j,i}$$

Comme le dessin n'admet pas d'automorphismes, les $T_{j,i}$ sont uniques et doivent donc vérifier les deux familles de conditions:

$$\begin{aligned} T_{k,j}T_{j,i} &= T_{k,i} \\ T^{\sigma}_{j,i} &= T_{\sigma(j),\sigma(i)} \text{ pour tout } \sigma \text{ dans } Gal(\bar{L}/K) \end{aligned}$$

On utilise alors le critère de Weil et la construction donnée dans [**Weil**] pour construire un modèle rationnel associé à ce dessin.

Théorème 3 ***(Critère de Weil)*** *Soit K un corps de nombres et L une extension algébrique de K. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et Θ l'ensemble des injections de L dans $\bar{K}$ qui fixent K.*
Soit V une variété projective (resp. affine) définie sur L. Pour tout $\sigma \in \Theta$ on note ${}^{\sigma}V$ la variété obtenue par action de σ sur V. On suppose qu'il existe, pour tout $\sigma, \tau \in \Theta$ un isomorphisme $T_{\tau,\sigma}$ de ${}^{\sigma}V$ dans ${}^{\tau}V$ et que ces divers isomorphismes satisfont les deux familles de conditions suivantes

$$\begin{aligned} T_{\nu,\tau}T_{\tau,\sigma} &= T_{\nu,\sigma} \\ T^{\nu}_{\tau,\sigma} &= T_{\nu\tau,\nu\sigma} \textit{ pour tout } \sigma,\tau,\nu \textit{ dans } Gal(\bar{L}/K) \end{aligned}$$

Alors, il existe une variété projective (resp. affine) V_0 définie sur K et un isomorphisme T de V_0 dans V tels que $T_{\tau,\sigma} = {}^{\tau}T\,{}^{\sigma}T^{-1}$.

On reprend ici la construction de Weil dans le cas particulier d'une courbe de genre 0. Soit $B_1 = (\alpha_{1,k})_k$ une base de L_1 sur K. Les conjuguées de B_1 sont appelées B_i et sont des bases des L_i pour $1 \leq i \leq e$. On note $B_i = (\alpha_{i,k})_k$. Soient maintenant $(\delta_i)_{1\leq i\leq e}$ les fonctions coordonnées de l'espace affine A_e de dimension e.
Si l'homographie $T_{j,i}$ est donnée par la matrice

$$T_{j,i} = \begin{bmatrix} a_{j,i} & b_{j,i} \\ c_{j,i} & d_{j,i} \end{bmatrix}$$

on considère dans A_e la variété définie par le système d'équations $(E_{i,j})_{1\leq i<j\leq e}$

$$c_{j,i}\sum_k \alpha_{i,k}\delta_k \sum_k \alpha_{j,k}\delta_k + d_{j,i}\sum_k \alpha_{j,k}\delta_k - a_{j,i}\sum_k \alpha_{i,k}\delta_k - b_{j,i} = 0$$

L'ensemble des équations $E_{i,j}$ forme un système qui définit une courbe $\mathcal{C}_0$ définie sur K et isomorphe à P_1 par l'application ζ telle que

$$X_1 = \zeta(\delta_1, ..., \delta_e) = \sum_k \alpha_{1,k}\delta_k$$

L'application réciproque se construit en inversant la matrice B formée de tous les B_i. En effet B est inversible par indépendance des automorphismes.
Il est clair alors que la fonction de Belyi $\varphi_0 = \varphi_1 \circ \zeta$ est définie sur K.
On voit en outre que $\mathcal{C}_0$ se présente comme une intersection de quadriques *définies sur* K (penser à décomposer les équations $E_{i,j}$ comme sommes d'équations définies sur K). Il reste à construire un isomorphisme entre $\mathcal{C}_0$ et une conique plane définie sur K. Une telle conique est alors isomorphe à la droite projective sur une extension au plus quadratique de K.

7.3 Trivialisation des cocycles de $PGL(2,\bar{Q})$

Le modèle rationnel construit au paragraphe précédent présente l'inconvénient d'être plongé dans un espace affine de dimension élevée. On sait bien que toute courbe de genre 0 est isomorphe à une conique, mais la construction d'un tel isomorphisme n'est pas des plus aisées. De plus, dans le cas particulier où le dessin admet une famille de ramification de cardinalité impaire (par exemple, un nombre impair de points au dessus de 0 avec un ordre de ramification donné), on sait que le dessin admet un modèle sur la droite car toute conique admettant un diviseur de degré impair est isomorphe à le droite. On aimerait, alors, construire ce modèle rationnel sur la droite.

Soit donc $\varphi : P_1 \to P_1$ une fonction de Belyi définie sur une extension L du corps des modules K. Soit G le groupe de Galois de $\bar{L}/K$. Pour tout $\sigma \in G$ il existe H_σ une homographie unique telle que ${}^\sigma\varphi = \varphi H_\sigma$, et les H_σ forment un cocycle.

On suppose que $\varphi(\infty) \notin \{0, 1, \infty\}$. On appelle $P_i(X)$ pour $i \geq 1$ le polynôme unitaire dont les racines sont les points au dessus de 0 où la ramification est i. On définit de même $Q_i(X)$ et $R_i(X)$ avec les points au dessus de 1 et ∞ de ramification i.

Tous ces polynômes sont définis sur L. On cherche une fraction rationnelle définie comme combinaison multiplicative de ces polynômes et de degré négatif aussi grand que possible. D'après le théorème de Riemann-Hurwitz, il existe une telle fonction de degré -2. Dans le cas où il existe une famille (un polynôme parmi les P_i, Q_i, R_i) de cardinalité impaire, alors il existe une telle fonction de degré -1.

Appelons ψ une telle fonction, et $\mathcal{K}$ le diviseur associé. Le diviseur $\mathcal{K}$ vérifie

$$^\sigma\mathcal{K} = H_\sigma^{-1}(\mathcal{K})$$

On peut donc identifier les espaces linéaires correspondants aux différents conjugués en composant par les H_σ.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{T_\sigma} & \mathcal{L}(^\sigma\mathcal{K}) \\ & & \\ f & \longmapsto & f \circ H_\sigma \end{array}$$

Le cocycle H_σ se relève alors en un cocycle $\tilde{H}_\sigma$ à valeurs dans $GL(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ défini de la façon suivante.

Soit $\mathcal{B} = (\psi, X\psi, X^2\psi)$ (respectivement $\mathcal{B} = (\psi, X\psi)$) une base de $\mathcal{K}$. Pour $v = (v_1, v_2, v_3)$ (respectivement $v = (v_1, v_2)$) un vecteur à coordonnées dans $\bar{Q}$, on note f_v la fonction définie par $f_v = (v_1 + v_2X + v_3X^2)\psi$ (respectivement $f_v = (v_1 + v_2X)\psi$).
Pour $\sigma \in G$ on pose

${}^\sigma\! f_v = ({}^\sigma v_1 + {}^\sigma v_2 X + {}^\sigma v_3 X^2)\,{}^\sigma\psi$, ce qui définit une autre application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{U_\sigma} & \mathcal{L}(^\sigma\mathcal{K}) \\ & & \\ f & \longmapsto & {}^\sigma f \end{array}$$

On s'intéresse à la composée $T_\sigma^{-1}U_\sigma$. Il existe un élément unique $\tilde{H}_\sigma$ de $GL(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$ tel que

$$f_{\tilde{H}_\sigma({}^\sigma v)} \circ H_\sigma = {}^\sigma f_v$$

soit encore

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{T_\sigma^{-1} U_\sigma} & \mathcal{L}(\mathcal{K}) \\ & & \\ f_v & \longmapsto & f_{\tilde{H}_\sigma({}^\sigma v)} \end{array}$$

Les $\tilde{H}_\sigma$ forment un cocycle à valeurs dans $GL(\mathcal{L}(\mathcal{K}))$.
Par exemple, si le degré de ψ est -2, et si H_σ est représentée par la matrice

$$H_\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

alors $\tilde{H}_\sigma$ est donné par

$$\tilde{H}_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix} \psi(\frac{a}{c}).\frac{1}{c^2}$$

Puisque le $H^1(Gal(\bar{Q}/K), GL(\mathcal{L}(\mathcal{K})))$ est trivial, il existe $M \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ tel que $\tilde{H}_\sigma = M{}^\sigma M^{-1}$. Ce M se calcule explicitement comme série de Poincaré ([**Serr**] page 159, par exemple). On a alors pour tout v à coefficients rationnels

$${}^\sigma(f_{Mv}) = f_{Mv} H_\sigma$$

Soit maintenant v un vecteur à coefficients dans Q et $w = (w_1, w_2, w_3) = Mv$. On demande que $w_2^2 - 4w_1w_3 \neq 0$, ce qui est vérifié pour presque tout v.
Appelons α et β les racines de $w_1 + w_2X + w_3X^2$. Alors, l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$ formé de ces deux racines vérifie

$${}^\sigma\{\alpha, \beta\} = H_\sigma^{-1}\{\alpha, \beta\}$$

En particulier, il existe une extension de K au plus quadratique telle que pour tout $\sigma \in Gal(\bar{Q}/K(\sqrt{D}))$

$${}^\sigma\alpha = H_\sigma^{-1}\alpha \text{ et } {}^\sigma\beta = H_\sigma^{-1}\beta$$

Soit alors S une homographie telle que $S(\infty) = \alpha$ et $S(0) = \beta$. Si nous posons $\varphi_1 = \varphi S$, on a ${}^\sigma\varphi_1 = \varphi_1 T_\sigma$ avec $T_\sigma = S^{-1}H_\sigma{}^\sigma S$. Et T_σ vérifie $T_\sigma(0) = 0$ et $T_\sigma(\infty) = \infty$. Ainsi $T_\sigma(X) = t_\sigma X$ avec t_σ 1-cocycle scalaire et donc par le théorème 90 de Hilbert $t_\sigma = \lambda{}^\sigma\lambda^{-1}$. On pose alors $\varphi_2(X) = \varphi_1(\lambda X)$ et on obtient une fonction de Belyi définie sur $K(\sqrt{D})$ telle que ${}^\tau\varphi_2 = A/\varphi_2$ avec A une constante dans K et τ l'unique automorphisme non trivial de $K(\sqrt{D})/K$. Nous avons de même calculé une extension quadratique sur laquelle le cocycle H_σ se trivialise:

$$H_\sigma = {}^\sigma(\lambda S)(\lambda S)^{-1}$$

pour $\sigma \in Gal(\bar{Q}/K(\sqrt{D}))$.

On se trouve alors dans la situation de la section 5 et l'on sait construire un modèle rationnel sur la conique d'équation $x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$. On peut chercher à savoir si cette conique est isomorphe sur K à la droite projective. L'existence sur un corps K, d'une solution à l'équation $x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$ s'exprime avec le symbole de Hilbert global sur K, $(D, A)_K$. Ce symbole est la conjonction des symboles locaux en les places finies qui divisent $2AD$ et en les places à l'infini. Il est donc très facile à calculer. Il est plus difficile de trouver une solution explicite à l'équation $x^2 - Dy^2 - Az^2 = 0$.
Remarquons que dans le cas où le degré de ψ est -1, le calcul décrit plus haut conduit non pas à des paires rationnelles de points mais à des points rationnels, parce que la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ est 2. Le cocycle se trivialise alors directement sur le corps K lui même.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de calculer la clôture de Galois du corps L pour mener tous ces calculs. Le plus simple est de travailler en notation flottante. En effet, on connaît les conjuguées de toutes les grandeurs qui apparaissent, puisqu'elles proviennent de la famille initiales de fonctions de Belyi conjuguées, c'est à dire des H_σ.

8 Dessins dont le groupe d'automorphismes est quelconque

8.1 Monodromie d'un dessin et calcul du groupe d'automorphismes, dessin réduit

Si $\varphi : \mathcal{C} \to P_1$ est une fonction de Belyi de genre quelconque associée au dessin $\mathcal{D}$, on appelle "drapeaux" les composantes connexes de l'image réciproque par φ du segment ouvert $(0, 1)$. On définit trois permutations de ces drapeaux σ_0, σ_1, σ_∞ de la façon suivante: σ_0 fait tourner les drapeaux autour des sommets, dans le sens positif. De même σ_1 fait tourner les drapeaux autour des cotés, et σ_∞ autour des faces. On a alors $\sigma_0\sigma_1\sigma_\infty = 1$ et le groupe engendré par ces trois permutations est le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de la clôture galoisienne de l'extension associée au revêtement défini par φ. Appelons $\mathcal{H}$ le stabilisateur de 1 dans $\mathcal{G}$, alors le groupe d'automorphismes du revêtement est le quotient par $\mathcal{H}$ de son normalisateur dans $\mathcal{G}$

$$\mathfrak{A} = \mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})/\mathcal{H}$$

et ce dernier groupe est isomorphe au centralisateur de $\mathcal{G}$ dans le groupe complet de permutations S_N où N est le degré du dessin:

$$\mathfrak{A} = \mathcal{Z}_{S_N}(\mathcal{G})$$

En effet, à chaque élément a de $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})/\mathcal{H}$ on associe l'unique élément $\tilde{a}$ de $\mathcal{Z}_{S_N}(\mathcal{G})$ tel que $\tilde{a}(1) = a(1)$.
Cela donne une description combinatoire de ce groupe d'automorphismes ainsi qu'un moyen de le calculer. En particulier, si $\tilde{a} \in \mathcal{Z}_{S_N}(\mathcal{G})$, alors $\tilde{a}$ commute aux σ_i et donc il induit une permutation de leurs cycles qui décrit l'action de l'automorphisme correspondant sur les points de ramification.
Par ailleurs si $(\mathcal{C}, \varphi)$ est définie sur un corps de nombres L , alors il existe une courbe $\mathcal{C}_0$, un revêtement $\varphi_0 : \mathcal{C}_0 \to P_1$ et un revêtement galoisien de groupe $\mathfrak{A}$, $\chi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ tous définis sur L et tels que $\varphi = \varphi_0 \circ \chi$. Le dessin $\mathcal{D}_0$ associé à φ_0 est appelé dessin

réduit du dessin initial. On voit que tout corps de définition du dessin initial est aussi corps de définition du dessin réduit.
En fait, le corps des modules du dessin réduit est inclus dans le corps des modules du dessin initial. En effet, si K est le corps des modules du dessin initial, soit $\sigma \in Gal(\bar{Q}/K)$. Alors, il existe un isomorphisme $H_\sigma : {}^{\sigma}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ défini sur $\bar{Q}$ tel que ${}^{\sigma}\varphi = \varphi H_\sigma$. Il existe donc un unique morphisme $h_\sigma : {}^{\sigma}\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "\chi"'] & {}^{\sigma}\mathcal{C} \arrow[l, "H_\sigma"'] \arrow[d, "{}^{\sigma}\chi"] \\
\mathcal{C}_0 & {}^{\sigma}\mathcal{C}_0 \arrow[l, "h_\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Ceci prouve que le corps des modules du dessin réduit est un sous corps du corps des modules du dessin initial. En fait on a mieux.
L'unicité de h_σ implique que les h_σ vérifient la condition de cocycle sur $Gal(\bar{Q}, K)$. Ainsi, le dessin réduit $\mathcal{D}_0$ admet un modèle sur K. La classe de K-isomorphisme de ce modèle est uniquement déterminée par le dessin $\mathcal{D}$. On la note $\mathcal{D}_0^{\mathcal{D}}$ et on l'appelle modèle réduit de $\mathcal{D}$. Noter que le dessin $\mathcal{D}_0$ peut avoir lui même des automorphismes, si bien qu'il peut admettre plusieurs K-modèles non K-isomorphes. Néanmoins, vu comme dessin réduit de $\mathcal{D}$, le dessin $\mathcal{D}_0$ admet un modèle canonique sur K.
Pour toute extension M de K, le modèle réduit $\mathcal{D}_0^{\mathcal{D}}$ a un point non singulier rationnel sur M si et seulement s'il existe une valeur non singulière de χ, $\alpha \in \mathcal{C}_0$ telle que $h_\sigma({}^{\sigma}\alpha) = \alpha$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{Q}, M)$.
Soit alors un point β sur $\mathcal{C}$ tel que $\chi(\beta) = \alpha$ et "ajustons" les H_σ de telle sorte que

$$H_\sigma({}^{\sigma}\beta) = \beta$$

pour $\sigma \in Gal(\bar{Q}, M)$.
Cela est toujours possible de manière unique parce-que le revêtement χ est galoisien. Les H_σ ainsi obtenus forment un cocycle, qui admet lui aussi un point rationnel. Donc, le dessin $\mathcal{D}$ admet un modèle sur le corps M, muni lui aussi d'un point rationnel β.

Théorème 4 – *Tout corps de définition d'un dessin est corps de définition de son dessin réduit.*

- *Le corps des modules du dessin réduit est inclus dans le corps des modules du dessin lui même.*

- *Le corps des modules K d'un dessin $\mathcal{D}$ est un corps de définition de son dessin réduit $\mathcal{D}_0$. Si le modèle réduit correspondant $\mathcal{D}_0^{\mathcal{D}} = (\mathcal{C}_0, h_\sigma)$ a un point non singulier rationnel sur une extension M de K, alors M est un corps de définition de $\mathcal{D}$ et il existe un modèle M-rationnel pour $\mathcal{D}$ avec un point régulier M-rationnel.*

Examinons maintenant le cas d'un dessin de genre 0. Soit $K(\sqrt{D})$ une extension au plus quadratique de K sur laquelle le cocycle h_σ se trivialise.
$\mathcal{D}_0^{\mathcal{D}}$ a alors une infinité de points $K(\sqrt{D})$-rationnels, la plupart non singuliers. Appliquant la troisième partie du théorème 4 on en déduit le

Théorème 5 *Tout dessin de genre 0 admet un modèle $\phi : P_1 \to P_1$ défini sur une extension au plus quadratique de son corps des modules.*

On a mieux encore. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs singulières de χ. Cet ensemble vérifie la condition

$$h_\sigma({}^\sigma\mathcal{S}) = S$$

et donc si sa cardinalité est impaire, le cocycle formé par les h_σ est dans la classe triviale (sur K) et admet donc une infinité de points K-rationnels. Or, on va voir que tout revêtement galoisien de genre 0 non cyclique a 3 valeurs singulières. On en déduit le

Théorème 6 *Tout dessin de genre* 0 *et de groupe d'automorphismes non cyclique et non trivial, admet un modèle $\phi : P_1 \to P_1$ défini sur son corps des modules.*

Il nous reste seulement à énoncer le résultat classique suivant (voir [**Arms**] page 106)

Théorème 7 *Tout revêtement galoisien de genre* 0 *de la sphère a pour groupe de Galois un groupe cyclique, dièdral ou bien l'un des trois groupes suivants:*

- A_4 *le groupe de symétrie du tetraèdre.*
- S_4 *le groupe de symétrie de l'octaèdre.*
- A_5 *le groupe de symétrie de l'icosaèdre.*

Le nombre de valeurs singulières est 2 *si le groupe de Galois est cyclique, et* 3 *sinon.*

Par exemple les applications $X \to X^n$ et $X \to X^n + X^{-n}$ ont pour groupes de Galois C_n et D_n respectivement.
Dans la section suivante nous allons examiner comment obtenir les modèles rationnels ci-dessus.

8.2 Normalisation de fractions rationnelles

Nous généralisons le procédé de normalisation déjà utilisé pour les arbres.
Soit

$$\varphi(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = \frac{X^F + f_1X^{F-1} + f_2X^{F-2} + \ldots + f_F}{g_0X^G + g_1X^{G-1} + g_2X^{G-2} + \ldots + g_G}$$

une fraction rationnelle. On suppose que $G \geq 1$ et $g_0 \neq 0$. Si l'on remplace X par AX pour $A \in C$ et que l'on met la fraction obtenue sous la forme ci-dessus, alors f_1 est multipliée par A^{-1}. On dit que f_1 est homogène de degré -1. De même f_i est de degré $-i$ et g_i est degré $G - F - i$.
Soit e l'ordre du groupe des automorphismes de φ qui fixent 0 et ∞. Alors $F - G$ est un multiple de e car c'est la ramification en l'infini. En fait, e est le pgcd de tous les entiers k tels qu'il existe une fonction de degré k non nulle parmi les f_i et les g_i.
En particulier, il existe une combinaison non nulle et de degré e de la forme

$$\mathcal{S} = \prod_{i \geq 0} f_i{}^{\mu_i} g_i{}^{\nu_i}$$

où les $(\mu_i)_i$ et les $(\nu_i)_i$ sont à valeurs dans Z et à supports finis.
Si une fonction de Belyi φ satisfait les trois conditions suivantes:

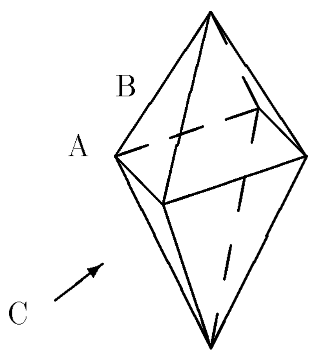
- $\varphi(\infty) \in \{0, 1, \infty\}$

- $g_1 = 0$
- $\mathcal{S} = 1$ pour un $\mathcal{S}$ donné comme ci-dessus.

alors on dira qu'elle est normalisée.
Il est clair que si σ est dans le groupe des modules du dessin, alors ${}^{\sigma}\varphi$ est encore une fonction de Belyi normalisée pour ce dessin. La normalisation est conservée.
On a mieux:

Définition 1 *Soit φ une fonction de Belyi et α un point de ramification de φ. Le type de α est le triplet $\mathcal{T}(\alpha) = (\varphi(\alpha), r, e)$ où r est le degré de ramification de φ en α et e est l'ordre du sous groupe des automorphismes du dessin qui fixent α.*
Si φ est une fonction de Belyi normalisée, on définit son type comme celui de son point à l'infini.

Il est clair que le type est invariant par action de Galois.
Soient maintenant φ_1 et φ_2 deux fonctions de Belyi normalisées par les mêmes conditions et associées à un dessin donné. Il existe donc une homographie H telle que $\varphi_2 = \varphi_1 H$. Supposons de plus que les points à l'infini de ces deux fonctions se correspondent par un automorphisme du dessin. Alors H peut être choisi telle que $H(\infty) = \infty$. On voit alors que les conditions $g_1 = 0$ et $\mathcal{S} = 1$ implique que H est l'identité.
Ainsi, le nombre de fonctions de Belyi d'un type donné et normalisées par un ensemble donné de conditions, est borné par le nombre de points du type considéré, dans le dessin, *à automorphismes près.* En particulier, une telle fonction de Belyi est définie sur une extension du corps des modules, de degré inférieur à ce nombre.
Exemple
L'octaèdre



Ce dessin admet 3 fonctions de Belyi normalisées correspondant aux points A, B, C. Elles sont toutes définies sur son corps des modules car le groupe d'automorphismes agit transitivement sur les sommets, sur les arêtes et sur les faces.

Application: calcul du corps des modules d'un dessin
La donnée d'une famille de fonctions de Belyi normalisées permet de calculer le corps des modules du dessin. En effet, si les $(\varphi_i)_{1\leq i\leq I}$ sont l'ensemble des fonctions de Belyi

conjuguées par action de Galois à φ_1, alors le corps K des modules du dessin est l'intersection des corps de définition K_i de ces fonctions.
Soit $(c_{1,j})_{1\leq j\leq J}$ un vecteur formé de l'ensemble des coefficients de φ_1, et de même, soient $(c_{i,j})_{1\leq j\leq J}$ pour $1 \leq i \leq I$ les vecteurs formés des coefficients des

$$(\varphi_i)_{1\leq i\leq I}$$

Ces vecteurs sont conjugués au dessus de K.
Appelons $\sigma_{i,j}$ la i-ème fonction symétrique de la famille $(c_{1,j}, c_{2,j}, ..., c_{I,j})$. Les $\sigma_{i,j}$ sont dans K et elles l'engendrent.

Soit maintenant $\mathfrak{A}$ le groupe d'automorphismes du dessin. C'est l'un des groupes énumérés au théorème 7. Soit X l'ensemble des points fixés par un élément non trivial de $\mathfrak{A}$ et faisons agir $\mathfrak{A}$ sur X. Il est bien connu (voir [**Arms**] page 106) que le nombre d'orbites est 3 si $\mathfrak{A}$ n'est pas cyclique. Soient $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$,$\mathcal{O}_3$ ces orbites. Si x_i est un élément de $\mathcal{O}_i$ alors l'ordre du stabilisateur de x_i dans $\mathfrak{A}$ ne dépend que de i. On obtient ainsi trois entiers caractéristiques du groupe $\mathfrak{A}$ et dont les valeurs sont donnés dans la table suivante:

- 2,2,n pour $n \geq 2$ si le groupe est D_n.
- 2,3,3 si le groupe est A_4.
- 2,3,4 si le groupe est S_4.
- 2,3,5 si le groupe est A_5.

On voit que dans tous les cas, sauf pour D_2, il existe une orbite d'ordre différent des autres. Alors, une fonction de Belyi normalisée obtenue en envoyant à l'infini un point de cette orbite, sera définie sur le corps des modules du dessin.
Reste alors le cas où le groupe d'automorphismes est le groupe de Klein. On obtient trois fonctions de Belyi normalisées correspondant aux trois orbites, et définies sur des extensions du corps des modules de degré au plus trois. En fait, ou bien l'une d'elles au moins est définie sur le corps des modules, ou bien elles sont toutes les trois conjuguées. Dans ce dernier cas, appelons φ_1, φ_2 et φ_3 ces fonctions. Le groupe d'automorphismes de φ_1 est engendré par les deux automorphismes $X \rightarrow -X$ et $X \rightarrow \alpha^2/X$ où $\alpha \in C$. Ainsi, φ_1 se décompose comme

$$\varphi_1(X) = \Phi_1(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{X^2})$$

On procède alors comme au paragraphe 8.1 en calculant un cocycle h_σ pour les Φ_i puis en le relevant en un cocycle pour les φ_i. Ces cocycles se trivialisent alors sur le corps de définition par la méthode exposée en 7.3. Ici, le diviseur fixé par le cocycle h_σ est l'ensemble $\{-2, 2, \infty\}$ des valeurs singulières du revêtement défini par $X \mapsto \frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{X^2}$.
Cela résout la question de la recherche des fonctions de Belyi dans le cas où le groupe d'automorphismes est non cyclique.

8.3 Groupes cycliques d'automorphismes

On note que dans le cas cyclique d'ordre e, il n'y a que deux points fixes d'automorphismes et la normalisation décrite plus haut conduit à envoyer l'un en 0 et l'autre à l'infini. Si les types de ces orbites sont distincts, alors les deux fonctions de Belyi normalisées correspondantes sont définies sur le corps des modules du dessin. Si les deux types sont égaux, alors au pire, les deux fonctions de Belyi sont définies sur la même extension quadratique du corps des modules du dessin et elles sont conjuguées.
Regardons plus en détail comment se pose alors le problème de la descente.
On vient de calculer deux fonctions de Belyi Ψ et $\bar{\Psi}$ définies sur une extension $K(\sqrt{D})$ du corps des modules du dessin. On voit sans peine qu'il existe deux nombres A et B tels que $B^e = A \in K$ et

$$\bar{\Psi}(X) = \Psi(B/X)$$

De plus, $\Psi(X) = \Pi(X^e)$ où Π est une fraction rationnelle définie sur $K(\sqrt{D})$.
Si $e = 2f+1$ est impair, alors posons $\Psi_0(X) = \Psi(B^{f+1}X)$. On voit alors que $\bar{\Psi}_0(X) = \Psi_0(A^{-1}/X)$. Ainsi, le dessin admet un modèle rationnel sur la courbe d'équation $x^2 - Dy^2 - A^{-1}z^2 = 0$. On le construit comme au paragraphe 7.1.

Théorème 8 *Un dessin de genre zéro dont le groupe d'automorphismes est cyclique d'ordre impair admet un modèle sur son corps des modules.*

Si $e = 2f$, il peut y avoir une obstruction à l'existence d'un modèle rationnel pour le dessin. Dans le cas particulier du paragraphe 6, le dessin "réduit" défini par Π n'a pas d'automorphisme. Alors, l'obstruction est mesurée par un symbole de Hilbert: le dessin a un modèle rationnel si et seulement si la classe d'isomorphisme de coniques associée à son dessin réduit est triviale.

9 Conclusion

Nous venons de voir que tout dessin de genre 0 admet un modèle sur son corps des modules pourvu que son groupe d'automorphismes ne soit pas cyclique d'ordre pair. En fait, si le groupe d'automorphismes n'est pas cyclique, le modèle peut être choisi sur P_1. Si le groupe d'automorphismes est cyclique d'ordre impair, et en particulier s'il est trivial, le dessin admet un modèle sur une conique. Nous en avons donné des exemples. Tous ces résultats demeurent valables pour un revêtement connexe, fini, de genre 0 de la sphère, ramifié au dessus d'un ensemble rationnel. Les preuves et les procédés de construction sont les mêmes.

10 Calculs et résultats

Nous décrivons maintenant la conduite des calculs sous Maple pour la fonction de Belyi de la formule (11).
On note

$$Q(X) = X^{12} + q_{11}X^{11} + ... + q_1 X + q_0$$

$$\Theta_1 = x^3 + r_{1,2}x^2 + r_{1,1}x + r_{1,0} \text{ et } \Theta_{-1} = x^3 + b_{-1,2}x^2 + b_{-1,1}x + b_{-1,0}$$

$$\Theta_3 = x^3 + r_{3,2}x^2 + r_{3,1}x + r_{3,0} \text{ et } \Theta_{-3} = x^3 + b_{-3,2}x^2 + b_{-3,1}x + b_{-3,0}$$

On obtient un premier ensemble d'équations en divisant (11) par X^{12} et en dérivant. Les considérations ordinaires de divisibilité donnent alors

$$\widehat{\Theta}_3^2 = XQ' - 6Q$$

Cette relation permet d'éliminer tous les coefficients de Q sauf q_6. En compensation elle donne une équation sur les coefficients de Θ_3 que l'on appelle E_6.
Une conséquence de la bicoloration est que si l'on note $\lambda = \Lambda^2$ alors

$$\Theta_1\Theta_3^3 = Q - \Lambda X^6 \text{ et } \Theta_{-1}\Theta_{-3}^3 = Q + \Lambda X^6$$

On en déduit que le résidu de Q modulo Θ_3^3 est proportionnel à X^6. Ceci donne 8 équations en les coefficients de Θ_3 que l'on appelle $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7, R_8$. Même chose pour Θ_{-3} et on obtient $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_7, B_8$.
On prend comme dernière condition de normalisation que

$$r_{3,2} + b_{-3,2} = 1$$

Ceci permet d'éliminer $b_{-3,2}$.
Il reste donc 5 inconnues (les coefficients de Θ_3 et Θ_{-3} sauf $b_{-3,2}$.)
On prend donc les 5 équations les moins grosses parmi celles dont on dispose à savoir E_6,R_0,R_8,B_0,B_8.
Malheureusement toutes les tentatives de résolution de ce système par la méthode de Grobner on échoué.
Mais en factorisant la différence $R_8 - B_8$ j'ai isolé le facteur

$$b_{-3,1} + r_{3,1} = \frac{1}{50}$$

On choisit donc d'adjoindre cette relation au système ce qui permet d'éliminer $r_{3,1}$. Maintenant il ne reste plus que 4 inconnues et Maple ne fait plus de difficultés.
On remarquera que Θ_1, Θ_{-1}, Θ_3, Θ_{-3} ne sont pas définis sur $Q(i)$ mais sur une extension quadratique $Q(i, \sqrt{11})$. Ceci parce que les rouges et les bleus sont exactement symétriques (même répartition des valences). Si on appelle τ l'automorphisme de $Q(i, \sqrt{11})$ tel que $\tau(i) = i$ et $\tau(\sqrt{11}) = -\sqrt{11}$ alors

$$\Theta_{-1} = \Theta_1^\tau \quad \text{et} \quad \Theta_{-3} = \Theta_3^\tau$$

Si l'on note par une étoile la transformation d'une fraction rationnelle à coefficients sur $Q(i)$, telle que

$$F^*(X) = \bar{F}(\frac{A}{X})$$

alors

$$\left(\widehat{\frac{\Theta_1}{x^3}}\right)^* = \zeta\frac{\widehat{\Theta}_1}{x^3} \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\frac{\Theta_3}{x^3}}\right)^* = \zeta\frac{\widehat{\Theta}_3}{x^3}$$

où

$$\zeta = \frac{54280 - 42471i}{68921}$$

Comme prévu, la norme de ζ est 1. Et donc $\zeta = \varepsilon/\bar{\varepsilon}$
où

$$\varepsilon = \frac{121i}{275684} - \frac{351}{275684}$$

Donc $\left(\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_1\right)^* = \varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_1$ et $\left(\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_3\right)^* = \varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_3$.
De plus, on remarque que

$$\lambda\zeta^4 = \frac{3^6 11^{11}}{2^{16}5^{12}41^{12}}$$

Et encore

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \left(\frac{40-9i}{41}\right)^{12}$$

Voici les valeurs obtenues pour Θ_1, Θ_3, $\widehat{\Theta}_1$, $\widehat{\Theta}_3$, λ.
On a posé $r = \sqrt{11}$.

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= x^3 + \left(\frac{33\,ir}{410} - \frac{36\,r}{205} + \frac{9}{10}\right)x^2 + \left(\frac{5247\,ir}{168100} - \frac{6831\,r}{84050} + \frac{45273}{168100} - \frac{4356\,i}{42025}\right)x \\
&\quad - \frac{7623\,i}{137842000} + \frac{6669\,r}{137842000} - \frac{22113}{137842000} + \frac{2299\,ir}{137842000} \\
\Theta_3 &= x^3 + \left(\frac{12\,r}{205} - \frac{11\,ir}{410} + 1/2\right)x^2 + \left(\frac{11\,ir}{33620} + \frac{1}{100} + \frac{309\,r}{84050}\right)x \\
&\quad - \frac{351\,r}{137842000} - \frac{1053}{137842000} - \frac{121\,ir}{137842000} - \frac{363\,i}{137842000} \\
\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_1 &= \left(\frac{121\,i}{275684} - \frac{351}{275684}\right)x^3 + \left(\frac{1089\,i}{1378420} - \frac{3159}{1378420}\right)x^2 \\
&\quad + \left(\frac{4719\,i}{13784200} - \frac{19593}{13784200}\right)x \\
&\quad - \frac{1773}{5513680} + \left(\frac{4719\,i}{56515220000} + \frac{19593}{56515220000}\right)x^{-1} \\
&\quad + \left(-\frac{1089\,i}{23171240200000} - \frac{3159}{23171240200000}\right)x^{-2} \\
&\quad + \left(\frac{351}{19000416964000000} + \frac{121\,i}{19000416964000000}\right)x^{-3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_3 &= \left(\frac{121\,i}{275684}-\frac{351}{275684}\right)x^3+\left(\frac{121\,i}{275684}-\frac{351}{275684}\right)x^2\\
&\quad+\left(\frac{847\,i}{13784200}-\frac{177}{551368}\right)x-\frac{993}{137842000}\\
&\quad+\left(\frac{177}{2260608800}+\frac{847\,i}{56515220000}\right)x^{-1}\\
&\quad+\left(-\frac{351}{4634248040000}-\frac{121\,i}{4634248040000}\right)x^{-2}\\
&\quad+\left(\frac{121\,i}{19000416964000000}+\frac{351}{19000416964000000}\right)x^{-3}\\
\lambda &= \frac{3^9\cdot 11^{13}\cdot 13\cdot 23\cdot 59\,i}{2^6\cdot 5^{11}\cdot 41^{12}}+\frac{3^6\cdot 7^2\cdot 11^{11}\cdot 31\cdot 241\cdot 3121}{2^{10}\cdot 5^{12}\cdot 41^{12}}
\end{aligned}
$$

On entreprend maintenant de dessiner sur la conique d'équation affine

$$u^2+v^2+\frac{1}{4100}=0$$

Le morphisme est donc $x=u+iv$, on obtient alors

$$
\begin{aligned}
-2^2 41^3\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_1 &= \left(968\,u^2+\frac{4356\,u}{5}+\frac{387079}{2050}\right)v\\
&\quad+2808\,u^3+\frac{12636\,u^2}{5}+\frac{1607679\,u}{2050}+\frac{1823643}{20500}\\
-2^2 41^3\varepsilon x^{-3}\widehat{\Theta}_3 &= \left(968\,u^2+484\,u+\frac{2783}{82}\right)v\\
&\quad+2808\,u^3+1404\,u^2+\frac{363903\,u}{2050}+\frac{44223}{20500}
\end{aligned}
$$

Références

[**Arms**] M.A. Armstrong. Groups and Symmetry, U.T.M. Springer Verlag (1988).

[**Bely**] G.V. Belyi. On Galois extensions of the maximal cyclotomic field, Izvestiya Ak. Nauk. SSSR, ser. mat., 43:2 (1979), 269-276.

[**Birc**] Bryan Birch. Arithmetic of noncongruence subgroups. *non publié.*

[**Grot**] Alexandre Grothendieck. Esquisse d'un programme. *non publié.*

[**Joux**] Antoine Joux. Thèse sur les applications de LLL en cryptographie et théorie de la complexité. Sous la direction de Jacques Stern. *à paraître.*

[**LeLeLo**] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra Jr. et L. Lovász. Factoring Polynomials with rational coefficients, Math. Ann. 261 (1982), 515-534.

[**Schn**] Leila Schneps. Dessins d'enfants on the Riemann sphere. *à paraître.*

[**Serr**] J.-P. Serre. Corps Locaux. Hermann.

[**ShVo**] Shabat G.B. et Voevodsky V.A. Drawing curves over number fields. Papers in honour of A. Grothendieck. The Grothendieck Festschrift . Birkhauser 1990, 199-229.

[**Weil**] André Weil. The field of definition of a variety. Amer. J. Math. (1956) 78, 509-524.