Notations et définitions

Soit un entier $n \geq 2$. On note $(e_1 \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (e_i est le vecteur *ligne* qui a toutes ses coordonnées nulles, sauf la i-ème qui vaut 1). On pose aussi $e = e_1 + \cdots + e_n$ ($e = (1, \ldots, 1)$).

On considère $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles de taille $p \times q$. Une *sous-matrice* dans $\mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{R})$, $a \leq p$, $b \leq q$, est obtenue en choisissant a lignes et b colonnes et tous les coefficients qui sont sur ces lignes et colonnes dans la matrice de départ. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une sous matrice de } \begin{pmatrix} 4 & \mathbf{1} & 9 & \mathbf{0} \\ 4 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Une matrice carrée Q de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une *matrice de permutation* s'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $Q_{\sigma(j),j} = 1$ et $Q_{i,j} = 0$ si $i \neq \sigma(j)$. On notera cette matrice $Q(\sigma)$ dans la suite. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xQ(\sigma) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Attention, dans la suite du sujet, on sera souvent amené à faire des produits matriciels de la forme vecteur-ligne $\times$ matrice.

On note $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x^{\downarrow}$ le vecteur des coordonnées de x triées dans l'ordre décroissant. Plus formellement, $x^{\downarrow}$ est le seul vecteur dans $\mathbb{D}^n$ qui est de la forme xQ pour une matrice de permutation Q. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, si $x = (3, -8, 1, 1)$, alors $x^{\downarrow} = (3, 1, 1, -8)$.

On définit la relation $\preccurlyeq$ de la façon suivante. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $y \preccurlyeq x$ si

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \ \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} .$$

Par exemple, si $y = (2, -2, -5, 2)$ et $x = (3, -8, 1, 1)$, alors $y^{\downarrow} = (2, 2, -2, -5), x^{\downarrow} = (3, 1, 1, -8)$, et les sommes partielles vérifient:

$$2 \leq 3, \quad 2+2 \leq 3+1, \quad 2+2-2 \leq 3+1+1, \quad 2+2-2-5 = 3+1+1-8,$$

ce qui implique $y \preccurlyeq x$.

1 Préliminaires

Question 1.1. Vérifier que $\preccurlyeq$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ mais en est une sur $\mathbb{D}^n$.

Question 1.2. Montrer que $y \preccurlyeq x$ si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n-1} y^{\downarrow}_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{\downarrow}_{n-i} \text{ et } \forall k \in \{0, \ldots, n-2\},\ \sum_{i=0}^{k} y^{\downarrow}_{n-i} \geq \sum_{i=0}^{k} x^{\downarrow}_{n-i}.$$

Question 1.3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{i=1}^n x_i = n$, alors $e \preccurlyeq x$.

2 Matrices doublement stochastiques

Une matrice réelle carrée $P = (P_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice *doublement stochastique* si toutes ses composantes sont positives et si les sommes sur les lignes et sur les colonnes valent toutes un:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad P_{ij} \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1.$$

Question 2.1. Soit P une matrice doublement stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de P. Soient P_1 et P_2 deux matrices doublement stochastiques, montrer que $P_1 P_2$ est aussi doublement stochastique.

Question 2.2. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que si $xP \preccurlyeq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors P est doublement stochastique *(on regardera l'effet de P sur les vecteurs e et e_i)*.

Question 2.3. Soit P une matrice doublement stochastique. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $y = xP$. Montrer qu'il existe une matrice doublement stochastique P' telle que $y^{\downarrow} = x^{\downarrow} P'$. Montrer que $y \preccurlyeq x$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, et Q une matrice de permutation. Une (λ, Q)-*transformation* est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forme suivante: $x \to xT$, avec T la matrice $T = \lambda I + (1-\lambda) Q$, où I est la matrice identité.

Question 2.4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Exprimer les coordonnées de xT en fonction de celles de x lorsque Q est la matrice d'une transposition (c'est-à-dire une permutation qui échange seulement deux coordonnées).

Question 2.5. Soient $x, y \in \mathbb{D}^n$ avec $y \preccurlyeq x$ et $x \neq y$. Montrer qu'il existe une (λ, Q)-transformation T_1 de la forme décrite en 2.4 telle que le vecteur $x' = xT_1$ vérifie $y \preccurlyeq x'$ et le cardinal de l'ensemble $\{i \mid x'_i = y_i\}$ est strictement plus grand que le cardinal de $\{i \mid x_i = y_i\}$.

Question 2.6. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Déduire des questions précédentes que $y \preccurlyeq x$ si et seulement si, il existe P, matrice doublement stochastique, telle que $y = xP$.

Question 2.7. Écrire un programme $\texttt{Transf}(x, y)$ (dans un langage de haut niveau, comme par exemple celui employé à la question 3.6) qui construit une matrice T_1 répondant à la question 2.5.

Remarque: le programme `Transf`(x, y) est la brique de base d'un programme qui construirait, pour tout couple $y \preccurlyeq x$, une matrice P telle que $y = xP$. La construction d'un tel programme n'est pas demandée.

Question 2.8. Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que:

$$\forall \sigma \text{ permutation de } \{1, \ldots, n\}, \quad \prod_{i=1}^{n} M_{\sigma(i),i} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M \text{ contient une sous-matrice nulle de taille } s \times t \text{ avec } s + t = n + 1.$$

(On pourra faire une récurrence sur n pour le sens $\Rightarrow$.)

Question 2.9. Montrer que si P est une matrice doublement stochastique, alors il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $P_{\sigma(1),1}P_{\sigma(2),2} \cdots P_{\sigma(n),n} > 0$.

Soit $c = \min(P_{\sigma(1),1}, P_{\sigma(2),2}, \ldots, P_{\sigma(n),n})$. Montrer que si $c \neq 1$ alors $P - cQ(\sigma)$ est de la forme μR, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et R doublement stochastique.

Question 2.10. *(Théorème de Birkhoff)* Soit P une matrice doublement stochastique. Déduire des questions précédentes qu'il existe un nombre fini k de matrices de permutations, $Q_1, \ldots, Q_k$ et des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ tels que $P = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_k Q_k$. De plus, montrer que l'on peut choisir $k \leq n^2 - n + 1$.

Question 2.11. En déduire la construction de l'ensemble des vecteurs y tels que $y \preccurlyeq x$ pour compléter la figure 1 (dans $\mathbb{R}^3$, en projection orthogonale à $(1, 1, 1)$) avec $x = (1, 0, 3)$.

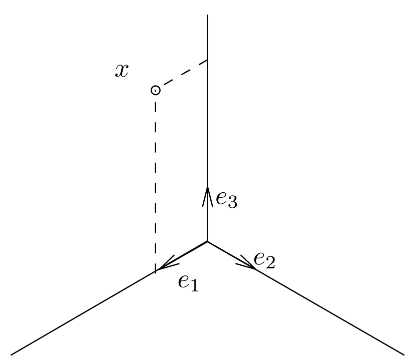

Figure 1: Dessiner l'ensemble $\{y \mid y \preccurlyeq x\}$.

3 Applications aux graphes

Colorations des arêtes d'un graphe

Un graphe fini $G = (X, E)$ est formé d'un ensemble fini X de *sommets* et d'un ensemble E de paires (ensembles à deux éléments) $\{x, y\}$ avec $x, y \in X$, appelées *arêtes*. Un graphe est souvent représenté par des points du plan pour les sommets et des liens entre sommets pour les arêtes. Une *coloration* des arêtes de G avec n couleurs est une application $c : E \to \{1, \ldots, n\}$ telle que les couleurs de deux arêtes e_1 et e_2 ayant un sommet en commun sont différentes:

$e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow c(e_1) \neq c(e_2)$. Un graphe est dit $(p_1, \dots, p_n)$-*coloriable* si on peut colorier ses arêtes avec n couleurs, en utilisant p_i fois la couleur i, pour $i = 1, \dots, n$. La figure 2 donne un exemple de coloration des arêtes d'un graphe avec 3 couleurs. Ce graphe est $(3, 3, 2)$-coloriable (la couleur 1 est utilisée 3 fois, la couleur 2, 3 fois et la couleur 3, 2 fois).

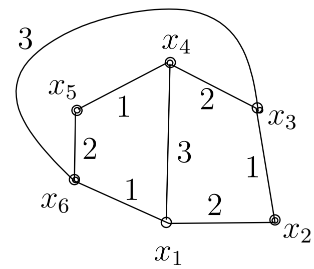

Figure 2: Coloration des arêtes du graphe avec 3 couleurs

Question 3.1. Soit G un graphe (p_1, p_2)-coloriable avec $p_1 > p_2$. Montrer que G est aussi $(p_1 - 1, p_2 + 1)$-coloriable.

Question 3.2. Soit $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{D}^n$. Montrer que si $q_j > q_i$ avec $1 \leq j < i \leq n$, alors $(q_1, \dots, q_j - 1, \dots, q_i + 1, \dots, q_n) \preccurlyeq (q_1, \dots, q_n)$.

Question 3.3. En déduire que si G est $(p_1, \dots, p_n)$-coloriable, alors G est $(q_1, \dots, q_n)$-coloriable dès que $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et $(q_1, \dots, q_n) \preccurlyeq (p_1, \dots, p_n)$. *On pourra s'inspirer de la méthode utilisée pour la question 2.5.*

Tournois

Un *tournoi* $T = (X, U)$ est formé d'un ensemble fini X de n sommets et d'un ensemble U de couples (x, y). Pour deux sommets quelconques x et y avec $x \neq y$, il y a toujours soit $(x, y) \in U$ soit, $(y, x) \in U$, et pas les deux. De plus $(x, x) \notin U$. Après numérotation des sommets du tournoi, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, sa *matrice d'incidence* est une matrice M de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, avec

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

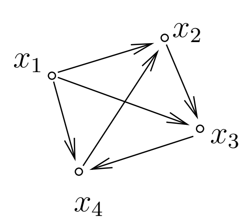

Figure 3: Tournoi à 4 sommets. Les couples $(x, y) \in U$ sont représentés par les arcs $x \to y$.

Un tournoi peut représenter une compétition sportive dans laquelle n équipes jouent toutes une fois les unes contre les autres. La présence du couple (x, y) dans U signifie que x a gagné contre y. Le *score* s_i du sommet x_i est le nombre de couples de la forme $(x_i, \cdot)$. Avec l'interprétation donnée précédemment, c'est le nombre de victoires de l'équipe x_i. Le score s du tournoi T est le vecteur des scores de ses sommets: $s = (s_1, \dots, s_n)$. La figure 3 montre un tournoi avec un score $(3, 1, 1, 1)$.

Question 3.4. Montrer qu'il existe un tournoi dont le score est $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Question 3.5. Montrer que si $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ est le score d'un tournoi, alors $(s_1, \dots, s_n) \preccurlyeq (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Pour la question qui suit, on considère un vecteur $s = (s_1, \dots, s_n)$ d'entiers positifs, tels que $(s_1, \dots, s_n) \preccurlyeq (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ et aussi $s_1 \leq \cdots \leq s_n$ (triés dans l'ordre croissant). L'objet de la question est de proposer un algorithme qui construit un tournoi de score s.

$M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice initialisée à zéro: $M_{i,j} = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. La procédure `Tri(`$x, i$`)` construit une matrice de permutation $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ qui trie les $i-1$ premières coordonnées de x dans l'ordre croissant et laisse les coordonnées $i, i+1, \dots, n$ inchangées. Par exemple, si $x = (7, 4, 8, 1, 6, 3)$ et $Q \leftarrow$ `Tri(`$x, 5$`)` alors $xQ = (1, 4, 7, 8, 6, 3)$ (les 4 premières coordonnées sont triées et le reste est inchangé). On considère l'algorithme suivant:

`Tournoi(`s`)`

`Pour` i `décroissant de` n `à 1 faire` $\{$

`Pour` j `croissant de 1 à` s_i `faire` $\{ \ M_{ij} \leftarrow 1; \}$

`Pour` j `croissant de` $s_i + 1$ `à` $i - 1$ `faire` $\{ \ M_{ji} \leftarrow 1;\ \ s_j \leftarrow s_j - 1; \ \}$

$Q \leftarrow$`Tri(`s, i`);`

$s \leftarrow sQ;\ M \leftarrow Q^{-1} M Q;\ \}$

(une boucle croissante de a à b avec $a > b$ n'est pas exécutée)

Question 3.6. Soit s' le vecteur s modifié par le premier passage dans la boucle sur i. Montrer que $(s'_{n-1}, \dots, s'_1) \preccurlyeq (n-2, n-3, \dots, 1, 0)$. En déduire que l'algorithme `Tournoi(`s`)` construit la matrice d'incidence M d'un tournoi de score $(s_1, \dots, s_n)$, à une permutation près des indices.

4 Schur-croissance et polygones

Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *symétrique* si pour toute matrice de permutation Q et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(xQ)$.
Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *croissante* (au sens usuel) si $(x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1 \dots, y_n)$.
Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *Schur-croissante* si $x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Elle est *Schur-décroissante* si $-f$ est Schur-croissante.
Soit une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$ et $x \in \mathbb{R}^{n-2}$. On définit $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, par $f_x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x)$.

Question 4.1. Montrer que si f est Schur-croissante, alors f est symétrique. Montrer que f est Schur-croissante si et seulement si elle est symétrique et Schur-croissante en ses deux premiers arguments (autrement dit, f_x est Schur-croissante pour tout $x \in \mathbb{R}^{n-2}$, si $n > 2$) *(S'inspirer de la méthode utilisée à la question 2.6).*

Question 4.2. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\psi(x_1, \dots, x_n) = \phi(g(x_1), \dots, g(x_n))$. Montrer que si ϕ est croissante au sens usuel et Schur-croissante et si g est convexe, alors ψ est Schur-croissante.

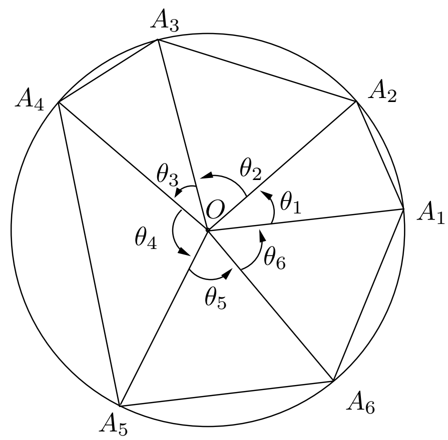

Figure 4: Polygone inscrit dans un cercle de rayon 1.

On considère un polygone à n côtés ($n \geq 3$) inscrit dans un cercle de rayon 1 centré en O (voir la figure 4 pour le cas $n = 6$). On appelle $A_1, \dots, A_n$ les n points de contact successifs du polygone avec le cercle (en choisissant le premier point arbitrairement, et en tournant dans le sens trigonométrique). On note θ_i l'angle (en radian) formé par les points A_i, O, A_{i+1} si $1 \leq i < n$ et par les points A_n, O, A_1 pour θ_n.

Question 4.3. Montrer que si le centre du cercle est à l'intérieur du polygone alors l'aire du polygone est une fonction Schur-décroissante des angles $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Question 4.4. Montrer que le polygone régulier a la plus grande aire parmi les polygones à n côtés inscrits dans le cercle.

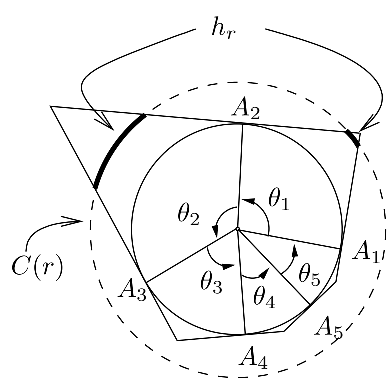

Figure 5: Polygone circonscrit au cercle unité et la fonction h_r.

On considère maintenant les polygones à n côtés ($n \geq 3$) circonscrits au cercle unité de centre O (voir la figure 5). On appelle $A_1, \dots A_n$ les n points de contacts successifs, dans l'ordre trigonométrique, du polygone avec le cercle (qui sont maintenant les points de tangence au cercle), et θ_i l'angle formé par les points A_i, O, A_{i+1} si $1 \leq i < n$ et par les points A_n, O, A_1 pour θ_n. On note $\mathcal{P}(\theta_1 \dots, \theta_n)$ le polygone ainsi formé.

On note $h_r(\theta_1, \dots, \theta_n)$ la longueur de la partie du cercle $C(r)$ (centré en O et de rayon r) qui reste dans le polygone $\mathcal{P}(\theta_1 \dots, \theta_n)$ (voir la figure 5). En particulier, $h_r(\theta_1, \dots, \theta_n) = 2\pi r$, si $r \leq 1$.

Question 4.5. Montrer que, pour tout $r \geq 0$, h_r est une fonction Schur-croissante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Question 4.6. En déduire la forme d'un polygone P, circonscrit au cercle unité, dont l'intérieur $\overset{\circ}{P}$ a le plus petit moment de rotation, défini par:

$$\int_{\overset{\circ}{P}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Qu'en est-il pour l'aire?

5 Instructions pour l'impression

Les définitions et notations (texte avant les préliminaires) doivent rester en première page.

Les figures doivent rester à leur place dans le texte.