Épreuve de Mathématiques et Informatique

Préliminaires

Pour tout ensemble fini E de cardinal k, on note $\mathbb{R}^E$ l'espace vectoriel de dimension k des fonctions de E vers $\mathbb{R}$. On note $\widehat{e}$ l'élément de $\mathbb{R}^E$ qui est la fonction qui à e associe 1, et à tout autre élément de E associe 0. En particulier, tout élément a de $\mathbb{R}^E$ s'écrit de façon unique $\sum_{e\in E} a_e\widehat{e}$, pour une famille de coefficients $(a_e)_{e\in E}$ — à savoir $a_e = a(e)$ pour tout $e \in E$. Les vecteurs $\widehat{e}$, $e \in E$ forment la *base canonique* de $\mathbb{R}^E$.

L'espace $\mathbb{R}^E$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$\left(\sum_{e\in E} a_e\widehat{e}\right) \cdot \left(\sum_{e\in E} b_e\widehat{e}\right) = \sum_{e\in E} a_e b_e$$

pour lequel la base $(\widehat{e})_{e\in E}$ est orthonormée. On note $|v| = \sqrt{v \cdot v}$.

On note 0 l'espace vectoriel de dimension 0. Il est réduit à l'élément 0.

On rappelle aussi que le *rang* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^F$ est $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^E - \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{card} E - \dim \operatorname{Ker} f$.

Si A et B sont deux matrices de même largeur, la matrice $\left[\frac{A}{B}\right]$ est obtenue en plaçant toutes les lignes de A au-dessus de toutes les lignes de B.

Une *relation binaire* sur un ensemble A est un sous-ensemble de $A \times A$. Pour toute relation binaire $\to$ sur un ensemble A, on notera $x \to y$ si et seulement si (x, y) est dans $\to$. On notera d'autre part $\to^*$ la relation définie par $x \to^* y$ si et seulement s'il existe un entier $k \geq 0$, et $k+1$ éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ de A tels que $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_k = y$. La relation $\to^+$ est définie par $x \to^+ y$ si et seulement s'il existe un entier $k \geq 1$, et $k+1$ éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ de A tels que $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_k = y$.

La différence ensembliste $\setminus$ est définie par $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$. La différence symétrique Δ est définie par $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

L'usage de la calculatrice est autorisé (et fondamentalement inutile). On pourra utiliser les résultats de questions précédentes même si on n'y a pas répondu.

1 Quelques calculs matriciels

Question 1.1. Soient $v_1, \ldots, v_{k-1}$ $k-1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^m$, et supposons qu'ils sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire $v_i \cdot v_j = 0$ pour tous i, j, $1 \leq i < j < k$. Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^m$, montrer que

$$v' = v - \sum_{\substack{1 \leq j < k \\ v_j \neq 0}} \frac{v_j \cdot v}{|v_j|^2} v_j$$

est orthogonal à tous les v_i, $1 \leq i < k$, et que de plus l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_{k-1}, v'$ est identique à celui engendré par $v_1, \ldots, v_{k-1}, v$.

Question 1.2. On considère le programme suivant :

```
GS1(A, m, n, k)
    pour j de 1 à k − 1 faire
        s := 0 ; x := 0 ;
        pour i de 1 à m faire
            s := s + A[i, j] × A[i, k] ; x := x + A[i, j] × A[i, j] ;
        si x ≠ 0 alors pour i de 1 à m faire
                            A[i, k] := A[i, k] − s × A[i, j]/x ;
```

On supposera que A est un tableau de m lignes et n colonnes, et que $1 \leq k \leq n$. L'élément $A[i, j]$ est donc défini pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La $j$ième colonne $A[\_, j]$ de A sera vue comme un vecteur v_j, et on supposera qu'en entrée de GS1, les vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sont orthogonaux deux à deux.

Que calcule GS1 (A, m, n, k) ?

Question 1.3. Montrer que le programme

```
GS(A, m, n)
    pour k de 1 à n faire
        GS1 (A, m, n, k)
```

remplace le tableau A de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ par un tableau de n vecteurs orthogonaux engendrant le même sous-espace vectoriel.

Montrer que la complexité de GS (A, m, n), c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires (affectations et opérations arithmétiques) effectuées par GS (A, m, n), est en $O(n^2 m)$.

Question 1.4. Pour toute matrice A de m lignes et n colonnes, en déduire qu'on peut calculer dim Ker A en $O(n^2 m)$ opérations élémentaires.

Question 1.5. En considérant la transposée A^t de A, en déduire que l'on peut calculer dim Ker A en $O(m^2 n)$ opérations élémentaires.

Question 1.6. En déduire un algorithme, fondé sur les algorithmes des questions précédentes, calculant dim Ker A en $O(\min(m, n)^2 \max(m, n))$ opérations élémentaires.

2 Complexes simpliciaux et homologie

On appelle *complexe simplicial* tout triplet $(V, \leq, K)$, où V est un ensemble fini de *sommets*, $\leq$ est un ordre total sur V, et K est un ensemble de parties non vides de V, vérifiant la condition :

(†) si $\alpha \in K$ et $\beta \subset \alpha$, $\beta \neq \emptyset$, alors $\beta \in K$.

On notera souvent K le complexe simplicial $(V, \leq, K)$, par abus de notation. On notera $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Les éléments α de K sont appelés les *simplexes* de K. La *dimension* dim α est par convention card $\alpha - 1$. En particulier, la dimension de tout simplexe de la forme $\{x\}$ est 0.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note K_p l'ensemble des simplexes de dimension p de K.

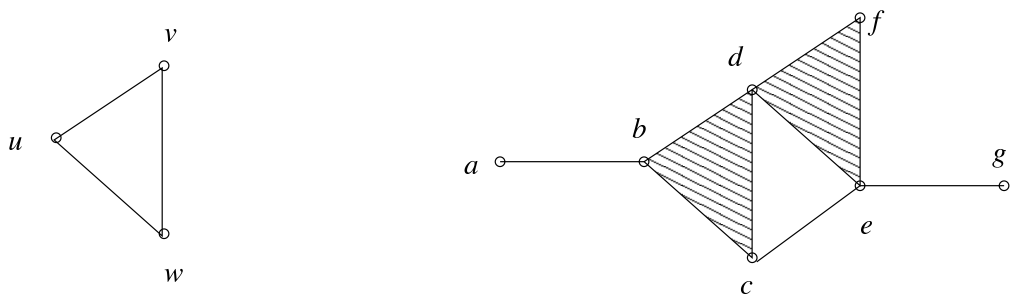


FIG. 1 – La représentation graphique d'un complexe simplicial

La relation $\sqsubset^+$ dénote l'inclusion stricte entre simplexes : $x \sqsubset^+ y$ si et seulement si x est strictement inclus dans y ; on dit alors que x est une *face* de y. Par exemple, $\{b, c\}$ est une face de dimension 1 de $\{b, c, d\}$. On dit que x est une *face directe* de y, et l'on note $x \sqsubset y$ si et seulement si x est une face de y et dim $x =$ dim $y - 1$.

Il est parfois utile de considérer une représentation graphique des complexes simpliciaux. Par exemple, le complexe simplicial de gauche de la figure 1 est formé des simplexes $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ (les trois segments, de dimension 1), et $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$ (leurs faces) — les sommets sont représentés comme des points. Le diagramme de droite est la représentation du complexe simplicial $(V, \leq, K)$ avec $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, et où les simplexes sont les faces triangulaires (les simplexes de dimension 2) $\{b, c, d\}$ et $\{d, e, f\}$, les segments (dimension 1) $\{a, b\}$, $\{c, e\}$ et $\{e, g\}$, et tous leurs sous-ensembles non vides.

Pour tout simplexe $\alpha = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ de K de dimension p, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$, pour tout i, $0 \leq i \leq p$, on pose

$$\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\}$$

où $\setminus$ désigne la différence ensembliste. On appelle $\partial_p^i \alpha$ la *face numéro* i de α.

Question 2.1. Montrer l'égalité

$$\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha = \partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha \tag{1}$$

pour tout simplexe α de K de dimension $p \geq 1$, et pour tous i, j tels que $0 \leq i < j \leq p$.

Question 2.2. Étant donné un complexe simplicial K, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note C_p l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{K_p}$. (On rappelle que K_p est l'ensemble des simplexes de dimension p de K.) Par extension, on notera C_{-1} l'espace vectoriel 0 réduit à un seul élément noté aussi 0. On appelle tout vecteur de C_p une *chaîne* de dimension p.

On pose $d_p : C_p \to C_{p-1}$, pour tout $p \geq 0$, l'unique application linéaire telle que

$$d_p(\widehat{\alpha}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

si $p \geq 1$, et telle que $d_p(\alpha) = 0$ si $p = 0$. Autrement dit, d_0 est l'application nulle et pour tout $p \geq 1$, pour tout vecteur $\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha}$ de C_p,

$$d_p \left(\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha} \right) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

On appelle d_p l'opérateur *bord*. Montrer que $d_{p-1} \circ d_p$ est l'application nulle pour tout $p \geq 1$. En déduire que $\mathrm{Im}\, d_p \subset \mathrm{Ker}\, d_{p-1}$.

Question 2.3. Le sous-espace vectoriel $Z_p = \mathrm{Ker}\, d_p$ de C_p, $p \geq 0$, est l'ensemble des *cycles* de dimension p. Le sous-espace vectoriel $B_p = \mathrm{Im}\, d_{p+1}$ de C_p, $p \geq 0$, est l'ensemble des *bords* de dimension p. Par la question 2.2, B_p est aussi un sous-espace vectoriel de Z_p ; autrement dit, tout bord est un cycle. On note H_p l'orthogonal de B_p dans Z_p. H_p est le *p-ième espace vectoriel d'homologie* de K.

La dimension β_p de H_p est appelé le *p-ième nombre de Betti* de K. D'autre part, la *caractéristique d'Euler* de K est

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \mathrm{card}\, K_p$$

Montrer le *théorème d'Euler-Poincaré* :

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p \tag{2}$$

Question 2.4. Calculer les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler du complexe simplicial de gauche de la figure 1, pour l'ordre $u < v < w$.

3 Calcul des nombres de Betti

Dans cette partie, on va concevoir des algorithmes pour calculer les nombres de Betti d'un complexe simplicial $(V, \leq, K)$. Pour ceci, on choisit une énumération des simplexes de dimension p de K, pour chaque $p \in \mathbb{N}$; on notera $\alpha_1^{(p)}$, ..., $\alpha_{\mathrm{card}\, K_p}^{(p)}$ les simplexes de dimension p de K. On dit que le *numéro* de $\alpha_j^{(p)}$ est j. K est alors représenté à l'aide des données suivantes :

- un entier n supérieur ou égal à la dimension de tout simplexe de K ;
- un tableau c, tel que $c[p]$ est le nombre de simplexes de K de dimension p, $0 \leq p \leq n$;
- un tableau $face$, tel que $face[p,j,i]$ est le numéro du simplexe $\partial_p^i \alpha_j^{(p)}$, pour tous $1 \leq p \leq n$, $1 \leq j \leq c[p]$, $0 \leq i \leq p$.

L'ordre $\leq$ sur V est donné par $\alpha_1^{(0)} < \alpha_2^{(0)} < \ldots < \alpha_{c[0]}^{(0)}$. On notera que, pour tous p et j fixés, tous les $face[p,j,i]$, $0 \leq i \leq p$, sont des entiers distincts.

Par exemple, le complexe simplicial de droite de la figure 1 sera représenté par :
- $n = 2$;
- $c[0] = 7$, $c[1] = 9$, $c[2] = 2$;
- En numérotant les simplexes comme suit :

dimension 0 :

1	2	3	4	5	6	7
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$

dimension 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{c,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,g\}$

dimension 2 :

1	2
$\{b,c,d\}$	$\{d,e,f\}$

le tableau $face[p,j,i]$ est donné par :

$face[1,j,i] =$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	3	4	4	5	5	6	6	7
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

$face[2,j,i] =$

$i \backslash j$	1	2
0	4	8
1	3	7
2	2	6

Question 3.1. On identifie les opérateurs bord $d_p : C_p \to C_{p-1}$ à leurs matrices, en choisissant pour tout C_q sa base standard $\widehat{\alpha}_1^{(q)}, \ldots, \widehat{\alpha}_{c[q]}^{(q)}$. On note d_p^t la matrice transposée de d_p. Montrer que

$$H_p = \operatorname{Ker} \left[\frac{d_{p+1}^t}{d_p} \right]$$

Question 3.2. En déduire, ainsi que de la partie 1, un algorithme prenant en entrée une représentation $(n, c, face)$ d'un complexe simplicial K, et un entier naturel p, et retournant le nombre de Betti β_p de K. En particulier, on demande d'écrire effectivement le programme construisant les matrices impliquées, dans le style des programmes donnés en question 1.2 et 1.3.

Combien d'opérations élémentaires nécessite cet algorithme ?

Question 3.3. Soit $(V, \leq, K)$ un complexe simplicial , et soit γ un sous-ensemble non vide de V qui n'est pas dans K, mais dont tous les sous-ensembles stricts sont dans K. On note que $K \cup \{\gamma\}$ est un complexe simplicial.

Posons $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ les nombres de Betti de K, $(\beta'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ceux de $K' = K \cup \{\gamma\}$. Soit d'_p l'opérateur bord de K', et disons que γ *crée un cycle dans* K (de dimension $p-1$) si et seulement si $d'_p(\widehat{\gamma}) \in \operatorname{Im} d_p$.

Montrer que, si γ crée un cycle dans K, alors $\beta'_p = \beta_p + 1$ et $\beta'_q = \beta_q$ pour tout $q \neq p$; et si γ ne crée pas de cycle dans K, alors $p \geq 1$, $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1} - 1$ et $\beta'_q = \beta_q$ pour tout $q \neq p - 1$.

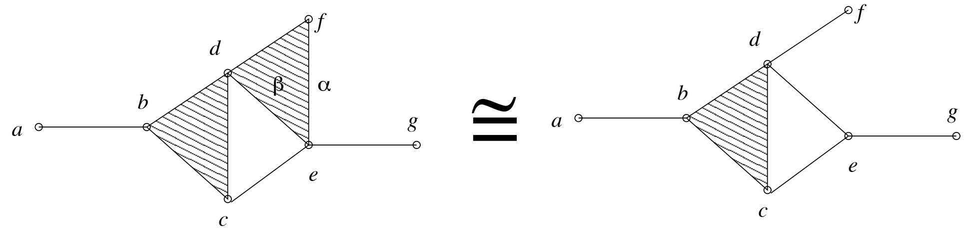


FIG. 2 – Homotopie simple

Question 3.4. Soient K et K' deux complexes simpliciaux. On dit que K est obtenu à partir de K' en *contractant* une face β de K' si et seulement s'il existe une face directe α de β telle que $K = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. (Un exemple est donné en figure 2.) Montrer que $K \cup \{\alpha\}$ est un complexe simplicial, mais pas $K \cup \{\beta\}$. Montrer que α crée un cycle dans K, et que β ne crée pas de cycle dans $K \cup \{\alpha\}$. En déduire que K et K' ont les mêmes nombres de Betti.

Question 3.5. On note $\cong$ la relation entre complexes simpliciaux définie par $K \cong K'$ si et seulement s'il existe un nombre fini de complexes simpliciaux $K_0 = K$, K_1, …, K_{m-1}, $K_m = K'$ tels que, pour tout i de 1 à m, K_i est obtenu à partir de K_{i-1} en contractant une face, ou K_{i-1} est obtenu à partir de K_i en contractant une face. On dira alors que K et K' sont *simplement homotopes*.

Que peut-on dire des nombres de Betti de deux complexes simpliciaux simplement homotopes ? Quels sont les nombres de Betti, et la caractéristique d'Euler, du complexe simplicial de droite de la figure 1 ?

4 Champs de vecteurs discrets

Pour tout complexe simplicial K, on appelle *champ de vecteurs discret* sur K toute relation binaire $\triangleright$ sur K telle que :

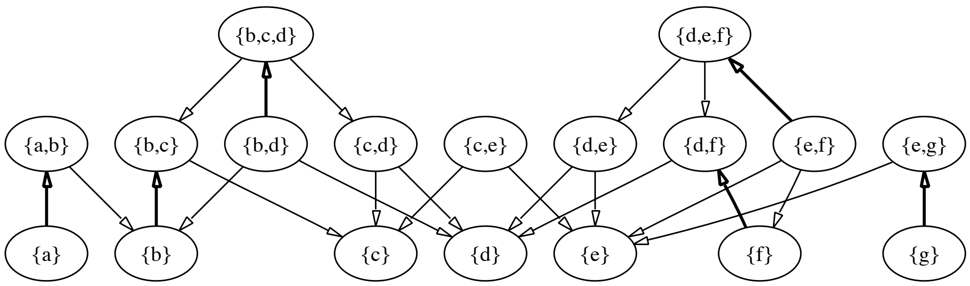
(i) $\alpha \triangleright \beta$ implique que $\alpha \sqsubset \beta$;

(ii) pour tout simplexe α, il existe au plus un simplexe β tel que $\alpha \bowtie \beta$, où $\bowtie$ est la relation définie par $\alpha \bowtie \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$ ou $\beta \triangleright \alpha$.

On pourra vérifier que le complexe simplicial de la droite de la figure 1 a, par exemple, un champ de vecteurs discret défini par :

$$\begin{array}{lll} \{b\} \triangleright \{b,c\} & \{b,d\} \triangleright \{b,c,d\} & \{a\} \triangleright \{a,b\} \\ \{g\} \triangleright \{e,g\} & \{f\} \triangleright \{d,f\} & \{e,f\} \triangleright \{d,e,f\} \end{array}$$

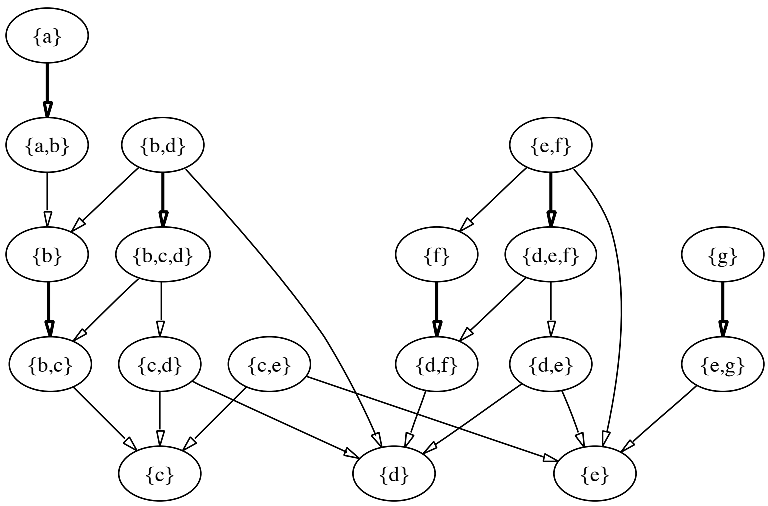
Si $\triangleright$ est un champ de vecteurs discret sur K, on définit la relation binaire $\rightarrowtriangle$ par $\alpha \rightarrowtriangle \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$, ou bien $\alpha \sqsupset \beta$ et $\beta \not\triangleright \alpha$. Dans l'exemple, la relation $\rightarrowtriangle$ est celle décrite dans le diagramme (3) ci-dessous, où l'on trouve une flèche de α vers β si et seulement si $\alpha \rightarrowtriangle \beta$. On observera que la flèche $\alpha \rightarrowtriangle \beta$ monte si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$; on a représenté ces flèches montantes en gras pour mieux les voir.



(3)

On dit que $\triangleright$, ou $\rightarrowtriangle$, est *acyclique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe α_1 tel que $\alpha_1 \rightarrowtriangle^+ \alpha_1$, autrement dit si et seulement s'il n'existe pas de simplexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \geq 1)$ tels que $\alpha_1 \rightarrowtriangle \alpha_2 \rightarrowtriangle \ldots \rightarrowtriangle \alpha_k \rightarrowtriangle \alpha_1$.

On peut réarranger le diagramme (3) comme suit et ainsi constater de visu que le champ de vecteurs discret $\triangleright$ de l'exemple est acyclique :



(4)

Dans le reste de cette partie, on supposera que K est un complexe simplicial fixé, et que $\triangleright$ est un champ de vecteurs discret acyclique sur K.

Question 4.1. On appelle *sous-complexe* K' de K tout sous-ensemble de K qui est un complexe simplicial. Soit A' l'ensemble de tous les simplexes de dimension maximale de K'. On admettra que, $\triangleright$ étant acyclique, pour tout sous-complexe K' non vide de K, il existe un simplexe α dans A' tel qu'il n'y a pas de simplexe γ dans A' avec $\gamma \rightarrowtriangle^+ \alpha$. On fixera un tel simplexe pour chaque sous-complexe K' non vide, et on le notera $\alpha_{\max}(K')$.

Dans l'exemple ci-dessus, on vérifie que A' contient juste les deux simplexes $\{b, c, d\}$ et $\{d, e, f\}$. On peut constater sur le diagramme (4) que l'on peut choisir indifféremment l'un ou l'autre pour $\alpha_{\max}(K)$.

Un sous-complexe K' sera dit *normal* si et seulement s'il n'existe pas de simplexes $\alpha \in K'$, $\beta \notin K'$ tels que $\alpha \bowtie \beta$.

Soit K' un sous-complexe normal non vide de K, $\alpha = \alpha_{\max}(K')$, et β un simplexe tel que $\alpha \bowtie \beta$. Montrer que β est aussi dans K', que $\beta \rhd \alpha$, et que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un sous-complexe normal de K.

Question 4.2. Un simplexe α de K est dit *critique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe β de K tel que $\alpha \bowtie \beta$.

Soit K' un sous-complexe normal non vide de K, $\alpha = \alpha_{\max}(K')$. Montrer que, si α est critique, alors $K' \setminus \{\alpha\}$ est un sous-complexe normal de K.

Question 4.3. Pour tout sous-complexe normal K' de K, on note $c_p(K')$ le nombre de simplexes critiques de K', et $\beta_p(K')$ le p-ième nombre de Betti de K'. Montrer que l'on a les *inégalités de Morse* :

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} c_p(K') \geq \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} \beta_p(K')$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, ainsi que l'*égalité de Morse* :

$$\chi(K') = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p c_p(K')$$

(Indication : supprimer dans le bon ordre des simplexes de K', en se fondant sur les questions précédentes. On pourra s'aider des résultats de la partie 3.)

Question 4.4. En appliquant le résultat précédent au cas $K' = K'$, en déduire les *inégalités de Morse faibles* :

$$c_p(K) \quad \geq \quad \beta_p(K)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5 Évasivité

Soit $(V, \leq, K)$ un complexe simplicial fixé, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$, $n \geq 1$.

Le but de cette partie est d'examiner la possibilité d'écrire un programme prenant en entrée un sous-ensemble α de V et retournant Vrai si α est un simplexe de K, Faux sinon.

On se limite à des programmes qui procèdent uniquement en posant des *questions* de la forme "est-ce que $v_i \in \alpha$?" ($1 \leq i \leq n$), et selon la réponse, vrai ou faux, posera d'autre questions, jusqu'à décider de retourner VRAI ou FAUX. Un tel programme sera appelé un *reconnaisseur* $\textsc{Rec}_K$ (α) pour K.

Un reconnaisseur sera estimé efficace s'il peut décider si $\alpha \in K$, pour tout $\alpha \subset V$, en posant strictement moins de n questions. Pour chercher un reconnaisseur efficace pour K, on va jouer sur l'ordre dans lequel il pose les questions.

On associera à chaque reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$ une application qui à tout sous-ensemble α de V associe une permutation σ_α de $\{1, 2, \dots, n\}$, vérifiant la propriété :

(‡) pour tout $\alpha \subset V$, si $v_{\sigma_\alpha(k)} \in \alpha$ et $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(k)}\}$ $(1 \leq k \leq n)$ alors $\sigma_\beta(j) = \sigma_\alpha(j)$ pour tout j, $1 \leq j \leq k$.

La façon de construire l'application $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$ à partir de $\textsc{Rec}_K$ est la suivante. Supposons que, pour décider si $\alpha \in K$, $\textsc{Rec}_K$ pose comme première question "est-ce que $v_{i_1} \in \alpha$?", alors on pose $\sigma_\alpha(1) = i_1$. Ensuite, si $\textsc{Rec}_K$ pose comme deuxième question "est-ce que $v_{i_2} \in \alpha$?", alors on pose $\sigma_\alpha(2) = i_2$, et ainsi de suite. Intuitivement, $\textsc{Red}_K$ ne va pas poser deux fois la même question, ce qui fait de σ_α une permutation. La condition *(‡)* exprime que si l'on doit poser une série de questions pour reconnaître α, et si β ne diffère de α qu'à partir de la $k$ième question, alors on aurait posé les mêmes k premières questions pour reconnaître β.

Dans la suite, on fixera un reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$. On note σ_α la famille de permutations vérifiant *(‡)* qui lui est associée.

On définit $\triangleright$ par $\beta \triangleright \alpha$ si et seulement si $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$ et $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$. (On rappelle que n est le nombre de sommets de K.) Comme précédemment, on définit $\bowtie$ par $\alpha \bowtie \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$ ou $\beta \triangleright \alpha$.

Question 5.1. Montrer que pour tout $\alpha \subset V$, il existe un unique $\beta \subset V$ tel que $\alpha \bowtie \beta$.

Question 5.2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies $[n_1, \dots, n_k]$ $(k \geq 0)$ d'entiers naturels. On appelle k la *longueur* de la suite $[n_1, \dots, n_k]$. La suite $[]$ de longueur nulle est la *suite vide*. On définit la relation binaire $\prec$ sur $\mathcal{S}$ par $[n_1, \dots, n_k] \prec [n'_1, \dots, n'_\ell]$ si et seulement s'il existe j, $1 \leq j \leq k$ satisfaisant les conditions **(a)** et **(b)** :

(a) pour tout i, $1 \leq i < j$, $n_i = n'_i$;

(b) $\ell = j - 1$, ou bien $\ell \geq j$ et $n_j < n'_j$;

Montrer que $\prec$ est un ordre strict, c'est-à-dire une relation irréflexive et transitive.

Question 5.3. Pour tout $\alpha \subset V$, on pose $\breve{\alpha} = \alpha \,\Delta\, \{v_{\sigma_\alpha}(n)\}$, où Δ dénote la différence symétrique. On pose d'autre part $[\![\alpha]\!]$ la suite croissante des indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v_{\sigma_\alpha(i)} \in \alpha$. (Par exemple, si $n = 3$, $\alpha = \{v_1, v_2\}$, $\sigma_\alpha = \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1\}$, alors $[\![\alpha]\!]$ est $[2, 3]$.)

Montrer que $\beta \twoheadrightarrow \alpha$ implique $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$. En déduire que $\triangleright$ est un champ de vecteur discret acyclique sur K.

Question 5.4. Un sous-ensemble α non vide de V est *évasif* si et seulement si $\alpha \in K$ et $\breve{\alpha} \notin K \cup \{\emptyset\}$, ou bien $\alpha \notin K \cup \{\emptyset\}$ et $\breve{\alpha} \in K$.

Le reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$ est *inefficace* si et seulement s'il existe un sous-ensemble α évasif. Il est *efficace* sinon. L'idée est que $\textsc{Rec}_K$ est inefficace si et seulement s'il y a un simplexe α non vide tel que, pour décider si α est dans K, on est obligé de poser toutes les questions jusqu'à la dernière. Aucun reconnaisseur ne teste jamais l'appartenance de l'ensemble vide à K ; ceci est dû au fait que l'ensemble vide n'est jamais dans K, et justifie la définition.

Soient β_p les nombres de Betti de K.

Montrer le *théorème de Kahn-Saks-Sturtevant* : quel que soit le reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$ pour K, il y a au moins $2\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p - 1\right)$ sous-ensembles évasifs pour $\textsc{Rec}_K$. En déduire que ceci implique qu'il n'existe aucun reconnaisseur efficace pour K dès que $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p \geq 2$. On pourra utiliser la question 4.4.

Les complexes simpliciaux de la figure 1 ont-ils des reconnaisseurs efficaces ?