Notations et définitions

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers. Soit n un entier avec $n \geq 2$. On note $(e_1 \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (e_i est le vecteur *ligne* qui a toutes ses coordonnées nulles, sauf la i-ième qui vaut 1). On pose aussi $e = e_1 + \cdots + e_n$ ($e = (1, \cdots, 1)$).

On considère les matrices réelles carrées de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Une *sous-matrice* de taille $p \times q$ est obtenue en choisissant p lignes et q colonnes et de la former ensuite avec tous les coefficients qui sont sur ces lignes et colonnes dans la matrice de départ.

Une matrice Q est une *matrice de permutation* s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que
$\forall j, \quad Q_{\sigma(j),j} = 1$ et $Q_{i,j} = 0$ si $i \neq \sigma(j)$.
On pourra noter cette matrice $Q(\sigma)$ dans la suite. Ainsi, si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xQ(\sigma) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$.

On note $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^{\downarrow}$ le vecteur des coordonnées de x triées dans l'ordre décroissant. Plus formellement, $x^{\downarrow}$ est le seul vecteur dans $\mathbb{D}^n$ qui est de la forme xQ pour Q une matrice de permutation. Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, si $x = (3, -8, 1, 1)$, alors $x^{\downarrow} = (3, 1, 1, -8)$.

On définit la relation $\preccurlyeq$ de la façon suivante: Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \preccurlyeq y \text{ si } \begin{cases} \sum_{i=1}^k x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^k y_i^{\downarrow} & \forall k, 1 \leq k \leq n-1, \\ \sum_{i=1}^n x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^n y_i^{\downarrow}. \end{cases}$$

Par exemple, si $x = (0, -1, -3, 1)$ et $y = (3, 1, -8, 1)$ alors, $x^{\downarrow} = (1, 0, -1, -3), y^{\downarrow} = (3, 1, 1, -8)$, et les sommes partielles vérifient:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & 3 \\ 1+0 & \leq & 3+1 \\ 1+0-1 & \leq & 3+1+1 \\ 1+0-1-3 & = & 3+1+1-8, \end{array}$$

ce qui implique $x \preccurlyeq y$.

1 Préliminaires

Dans la suite, on utilise parfois les deux conditions pour la définition de $x \preccurlyeq y$, de manière séparée:

$$\sum_{i=1}^k x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^k y_i^{\downarrow}, \quad \forall k, 1 \leq k \leq n-1, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^n y_i^{\downarrow}. \tag{2}$$

Question 1.1. Vérifier que $\preccurlyeq$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ mais en est une sur $\mathbb{D}^n$.

Correction Si $y = xQ$ avec $Q \neq I$, alors $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x$ et $x \neq y$. Ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.

En revanche, si $x, y, z \in \mathbb{D}^n$ alors la relation est transitive, réflexive et antisymétrique:
$x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$ par définition,
$x \preccurlyeq x$ par définition
et $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x$ implique $x = y$ par soustractions successives: $x_1 = y_1$, $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ qui en soustrayant la première égalité donne $x_2 = y_2$ et ainsi de suite.

Question 1.2. Montrer que $y \preccurlyeq x$ si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n-1} y^{\downarrow}_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{\downarrow}_{n-i} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, n-2\},\ \sum_{i=0}^{k} y^{\downarrow}_{n-i} \geq \sum_{i=0}^{k} x^{\downarrow}_{n-i}.$$

Correction On pose $S = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. Il suffit alors de remarquer que $\forall k, 0 \leq k \leq n-1$, (de même que pour x),

$$\sum_{i=0}^{k} y^{\downarrow}_{n-i} = S - \sum_{i=1}^{n-k-1} y^{\downarrow}_{i}.$$

Question 1.3. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{i=1}^n a_i = n$, alors $e \preccurlyeq a$.

Correction On va montrer que $e \preccurlyeq a^{\downarrow}$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\sum_1^k a^{\downarrow}_i \geq k \sum_1^n a^{\downarrow}_i / n = k = \sum_1^k e_i$.

2 Matrices doublement stochastiques

Une matrice réelle carrée $P = (P_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice *doublement stochastique* si toutes ses composantes sont positives et si les sommes sur les lignes et sur les colonnes valent toutes un:

$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \cdots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \cdots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

Question 2.1. Soit P une matrice doublement stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de P. Soient maintenant P_1 et P_2 deux matrices doublement stochastiques, montrer que $P_1 P_2$ est aussi doublement stochastique.

Correction $eP = e$ car la somme des colonnes est 1. Cela montre que e est vecteur propre a gauche (en fait aussi a droite) de P pour la valeur propre 1.

Pour le produit, $P1P_2$ a tous ses coefficients positifs par définition du produit matriciel. de plus, $P_1 P_2 e^T = P_1 e^T = e^T$ et $eP_1P_2 = eP_2 = e$, ce qui est la version matricielle de sommes à 1 des lignes et des colonnes.

Question 2.2. Soit P une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que si $xP \preccurlyeq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors P est doublement stochastique *(on regardera l'effet de P sur les vecteurs e et e_i).*

Correction $eP \preccurlyeq e$ avec la question 1.3 donne $eP = e$ soit la somme sur les colonnes est 1. $e_iP \preccurlyeq e_i$ dit que la somme sur la ligne i vaut 1 (par la condition (2)). Cela implique aussi par la question 1.2 que $\min_j P_{ij} \geq \min_j e_i(j) = 0$.

Question 2.3. Soit P une matrice doublement stochastique. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $y = xP$. Montrer qu'il existe une matrice doublement stochastique P' telle que $y^{\downarrow} = x^{\downarrow}P'$. Montrer que $y \preccurlyeq x$.

Correction Il existe deux permutations σ et δ telles que $x = x^{\downarrow}Q(\sigma)$ et $y^{\downarrow} = yQ(\delta)$ En remarquant que les matrices de permutations sont doublement stochastiques, on a $y^{\downarrow} = yQ(\delta) = xPQ(\delta) = x^{\downarrow}Q(\sigma)PQ(\delta)$. Comme le produit de matrices doublement stochastique est aussi doublement stochastique, $P' = Q(\sigma)PQ(\delta)$ convient. Pour la condition (2): $y^{\downarrow}e^T = x^{\downarrow}Pe^T = x^{\downarrow}e^T$.

Pour la condition (1), on choisit k entre 1 et n puis,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} y_j^{\downarrow} &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow}P'_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow}\sum_{j=1}^{k} P'_{ij}.\end{aligned}$$

Maintenant regardons le signe (que l'on espère négatif) de

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow}\sum_{j=1}^{k} P'_{ij} - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow}.$$

On remarque que si l'on pose $\sum_{j=1}^{k} P'_{ij} = c_i$, alors $\sum_{i=1}^{n} c_i = k$.

On coupe en deux et on introduit (astuce) $k - \sum_{i=1}^{n} c_i$ comme terme additionnel (qui vaut 0).

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow}c_i - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} + x_k^{\downarrow}(k - \sum_{i=1}^{n} c_i) = \sum_{i=1}^{k}(x_i^{\downarrow} - x_k^{\downarrow})(c_i - 1) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i^{\downarrow} - x_k^{\downarrow})c_i \leq 0.$$

car $c_i - 1 \leq 0$ et $x_i^{\downarrow} - x_k^{\downarrow} \leq 0$ si $i > k$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et si Q est une matrice de permutation alors , une (λ, Q)-*transformation* est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forme suivante: $x \to xT$, avec T la matrice $T = \lambda Id + (1-\lambda)Q$, où Id est la matrice identité.

Question 2.4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Exprimer les coordonnées de xT en fonction de celles de x lorsque Q est la matrice d'une transposition (c'est-à-dire une permutation qui échange seulement deux coordonnées).

Correction Si Q intervertit i et j avec $i < j$,

$$xT = (x_1 \cdots, \lambda x_i + (1-\lambda)x_j, \cdots, \lambda x_j + (1-\lambda)x_j, \cdots, x_n).$$

Question 2.5. Soient $x, y \in \mathbb{D}^n$ avec $y \preccurlyeq x$. Montrer qu'il existe une (λ, Q)-transformation T_1 de la forme décrite en 2.4 telle que le vecteur $x' = xT_1$ vérifie $y \preccurlyeq x'$ et le cardinal de l'ensemble $\{i : x'_i = y_i\}$ est strictement plus grand que le cardinal de $\{i : x_i = y_i\}$.

Correction Remarquons tout d'abord qu'il a plusieurs façons de faire en choisissant la fenêtre sur laquelle x et y se croisent. Ici on choisit la fenêtre la plus à droite.

Maintenant, si $y \neq x$, on pose j le plus grand indice tel que $y_i < x_i$. k le plus petit indice plus grand que j tel que $y_i > x_i$. De tels indices existent forcément car les sommes sont égales.

Par définition, on a donc la configuration suivante:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots x_n \\ & & \vee & || & \wedge & \wedge \text{ or } || \\ y_1 & \cdots & y_j & \cdots & y_k & \cdots y_n \end{array}$$

On regarde les différences $x_j - y_j$ et $y_k - x_k$ et on garde la plus petite: $\delta = x_j - y_j \wedge y_k - x_k$.

On applique ensuite la (λ, Q) transformation T_1 sur x, avec Q qui inverse j et k et $1 - \lambda = \delta/(y_j - y_k)$ (qui est < 1). Ainsi, $xT_1 = (x_1, \ldots, x_j - \delta, \cdots, x_k + \delta, \cdots)$. On peut remarquer que le vecteur xT_1 est toujours trié dans l'ordre décroissant:

$$x_j - \delta \geq y_j \geq y_{j+1} = x_{j+1} \geq \cdots \geq y_{k-1} = x_{k-1} \geq y_k \geq x_k + \delta.$$

On a aussi $xT_1 \preccurlyeq x$ car T_1 est doublement stochastique et finalement, $y \preccurlyeq xT_1$. En effet,
avant j: les sommes partielles pour xT_1 et y sont inchangés,
en j: x_j a diminué mais reste plus grand (ou égal) que y_j,
entre $j+1$ et $k-1$: $x_i = y_i$ par définition des indices j et k.
Au delà de k: les sommes partielles de xT_1 sont les mêmes que celles de x et donc les inégalités restent vraies.

Finalement, en remplaçant x par xT_1, le nombre de coefficients distincts entre y et x diminue de 1 (ou de deux).

Question 2.6. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Déduire des questions précédentes que $y \preccurlyeq x$ si et seulement si, il existe P, matrice doublement stochastique, telle que $y = xP$.

Correction On commence par remarquer que toute permutation est aussi une (λ, Q)-transformation en prenant $\lambda = 0$. On commence par multiplier x par $T_0 = (0, Q_0)$ pour le trier en décroissant. Si $x^\downarrow \neq y^\downarrow$, on applique $T_1 = (\lambda_1, Q_1)$, comme dans la question précédente, puis on trie à nouveau avec $(0, Q_2)$, puis on recommence comme dans la question précédente, en remplaçant x par $xT_0T_1T_2$, jusqu'à ce que le nombre de coefficients qui diffèrent avec y vale 0. En triant une dernière fois, on a donc $y = xT_1 \cdots T_k$. Le produit $T_1 \cdots T_k$ est doublement stochastique car chaque facteur l'est.

Remarquons qu' en réalité, il n'est pas nécessaire de retrier à chaque étape car par construction, xT_1 reste décroissant:

$$x_j - \delta \geq y_j \geq y_{j+1} = x_{j+1} \geq \cdots \geq y_{k-1} = x_{k-1} \geq y_k \geq x_k + \delta.$$

Cela donne un nombre d'étapes $k \leq n + 1$.

Question 2.7. Donner une programme Transf(x, y) (écrit dans un langage de haut niveau, comme par exemple celui de la question 3.6) qui construit une matrice T_1 répondant à la question 2.5.

Correction On reprend la construction de T comme décrite dans la question précédente, en supposant que x et y sont décroissants.

```
Transf(x,y)
{
j := n
while y_j ≥ x_j do { j := j − 1}
k := j
while y_k ≤ x_k do {k := k + 1}
if x_j − y_j < y_k − x_k then λ := (y_j − x_k)/(x_j − x_k) else λ = (y_k − x_j)/(x_k − x_j)
for i from 1 to n do
{
for ℓ from 1 to n do {T_iℓ := 0}
if i ≠ j and i ≠ k then T_ii := 1 else T_ii := λ
}
T_jk := 1 − λ ; T_kj := 1 − λ;
}
```

Remarque: le programme Transf(x, y) est la brique de base d' un programme qui construirait, pour tout couple $y \preccurlyeq x$, la matrice P telle que $y = xP$. La construction d'un tel programme n'est pas demandée.

Commentaire *Pour ce faire, il faut procéder comme c'est dit dans la Question 2.6.*

Question 2.8. Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que:

$$\forall \sigma \text{ permutation de } \{1, \ldots, n\}, \quad \prod_{i=1}^{n} M_{\sigma(i),i} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M \text{ contient une sous-matrice nulle de taille } s \times t \text{ avec } s + t = n + 1.$$

(On pourra faire une récurrence sur n pour le sens $\Rightarrow$.)

Correction On peut d'abord remarquer que ce résultat est invariant par renumérotation des lignes et des colonnes de M, ce que l'on ferra ensuite plusieurs fois.

On commence par la partie facile: ($\Leftarrow$).

Pour trouver une permutation telle que $M_{\sigma(1),1}M_{\sigma(2),2} \cdots M_{\sigma(n),n} \neq 0$, on considère les t colonnes correspondantes à la sous-matrice nulle. Pour pouvoir définir σ sur ces t colonnes, il faut trouver t lignes distinctes parmi $n - s$. Si $t + s = n + 1$, alors $n - s < t$, et c'est donc impossible.

Pour le sens $\Rightarrow$ on fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est trivialement vrai ($M_{1,1} = 0 \Rightarrow s + t = 2$).

Supposons le résultat vrai pour $n - 1$: HR$(n - 1)$. La matrice M contient au moins un élément non nul (sinon le résultat est trivialement vrai). On peut alors permuter les lignes et les colonnes de façon à avoir l'élément $M_{11} \neq 0$. On considère la sous-matrice sans la première ligne et colonne. Elle est de taille $n-1 \times n-1$. Toute permutation sur les $n-1$ derniers éléments peut se prolonger sur n éléments en posant $\sigma(1) = 1$. Par HR$(n-1)$, la matrice contient donc une sous-matrice nulle de taille $s \times t$ avec $s + t = n$.

En renumérotant à nouveau les lignes et les colonnes, on peut écrire

$$M' = Q_1 M Q_2 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

avec X de taille $s \times s$ et Z de taille $t \times t$. Toute permutation dans X peut être combinée avec toute permutation dans Z pour donner une permutation totale. Ainsi s'il existe une permutation dans X (resp. Z) dont le produit est non nul, alors, toute permutation dans Z (resp. X) donne un produit nul. On regarde le premier cas (l'autre est similaire). Par HR(t), Z contient une sous-matrice nulle de taille $u \times v$ avec $u + v = t + 1$. Par renumérotation des t dernières lignes et colonnes de M', on peut mettre cette sous-matrice en haut à gauche de Z. Finalement, cela nous donne une nouvelle sous-matrice nulle dans M' de taille $v \times (s + u)$ avec $v + s + u = t + 1 + s = n + 1$.

Commentaire *On peut remarquer que ce résultat est une version matricielle de la contraposée du théorème de Hall sur les couplages parfaits dans les graphes bipartis.*

Question 2.9. Montrer que si P est une matrice doublement stochastique, alors il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $P_{\sigma(1),1} P_{\sigma(2),2} \cdots P_{\sigma(n),n} > 0$.

Soit $c = \min(P_{\sigma(1),1}, P_{\sigma(2),2}, \ldots, P_{\sigma(n),n})$. Montrer que si $c \neq 1$ alors $P - cQ(\sigma)$ est de la forme μR, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et R doublement stochastique.

Correction Si P contient une sous-matrice nulle de taille $p \times q$ avec $q + p = n + 1$, alors on peut écrire

$$Q_1 P Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

qui est doublement stochastique. Si $p + q > n$ alors au moins une des deux matrices X ou Y est de taille $p \times r$ ou $s \times q$ avec $r < p$ ou $s < q$. On traite uniquement le cas $p \times r$. Comme P est doublement stochastique, la somme des p lignes de X vaut p. Ainsi, la somme des r premières colonnes de P est plus grande que $p > r$ et au moins une des colonnes de P a une somme > 1. (le cas $s \times q$ est similaire a une transposition près.)

Ainsi, avec la question précédente, il existe une permutation σ telle que $P_{\sigma(1),1} P_{\sigma(2),2} \cdots P_{\sigma(n),n} > 0$.

La matrice $R = P - cQ$ est positive par définition de c. De plus, $Re^T = Pe^T - cQe^T = (1-c)e^T$ et $eR = eP - eCQ = (1-c)e$. Donc $1/(1-c)R$ est doublement stochastique.

Question 2.10. *(Théorème de Birkhoff)* Soit P une matrice doublement stochastique. Déduire des questions précédentes qu'il existe un nombre fini k de matrices de permutations, $Q_1, \ldots, Q_k$ et des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ tels que $P = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_k Q_k$. De plus, montrer que l'on peut choisir $k \leq n^2 - n + 1$.

Correction On considère la matrice doublement stochastique $P_1 = 1/(1-c)(P - cQ)$ qui a au moins un coefficient nul de plus que P et on utilise la construction de la Question 2.9 sur P_1. On continue cette construction jusqu'à jusqu'à ce que tous les coefficients sont nuls sauf

n. La matrice restante est nécessairement une matrice de permutation. On obtient donc $P = \sum \alpha_i Q_i$, avec des α_i tous positifs par construction. De plus , $e = Pe = \sum \alpha_i Q_i e = (\sum \alpha_i)e$ implique $\sum \alpha_i = 1$.

Le nombre d'étapes de cette construction peut être borné de la manière suivante: après au plus $n^2 - n$ étapes, il reste n coefficients non nuls, une étape de plus est nécessaire, ce qui donne une borne $n^2 - n + 1$. **Commentaire** *En fait, une meilleure borne existe: $n^2 - 2n + 2$ et est la meilleure possible (Théorème de Marcus et Ree).*

Question 2.11. En déduire la construction de l'ensemble des vecteurs y tels que $y \preccurlyeq x$ pour compléter la figure 1 (dans $\mathbb{R}^3$, en projection orthogonale à $(1,1,1)$) avec $x = (1,0,3)$.

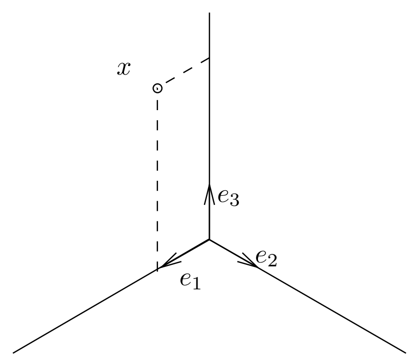

Figure 1: Dessiner l'ensemble $\{y | y \preccurlyeq x\}$.

Correction Si $y \preccurlyeq x$, alors par la question 2.6, $y = xP$. Par la question précédente, $y = \sum \alpha_i x Q_i$, donc y est dans l'enveloppe convexe de toutes les permutations de x. Réciproquement, un vecteur de la forme $z = \sum \alpha_i x Q_i$ avec $\sum \alpha_i = 1$ vérifie $z = x(\sum \alpha_i Q_i)$. En remarquant que $\sum \alpha_i Q_i$ est doublement stochastique, et en utilisant la question 2.3, $z \preccurlyeq x$. Celai donne la construction de $\{y | y \preccurlyeq x\}$ comme enveloppe convexe de toutes les permutations de x.

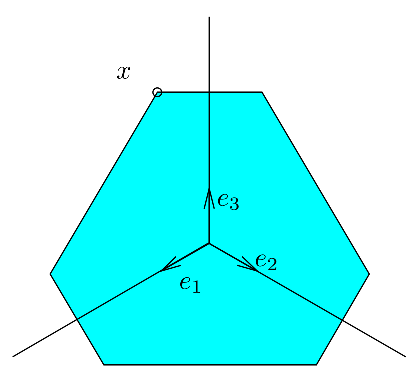

Figure 2: L'ensemble $\{y | y \preccurlyeq x\}$ est dessiné en bleu.

3 Graphes

Colorations des arêtes d'un graphe

Un graphe fini $G = (X, E)$ est formé d'un ensemble fini de k *sommets*, X et d'un ensemble E de paires $\{x, y\}$ avec $x, y \in X$, appelées *arêtes*. Un graphe est souvent représenté par des points du plan pour les sommets et des liens entre sommets pour les arêtes.

Soit un graphe $G = (X, E)$. Une coloration des arêtes de G avec n couleurs est une application $c : E \to \{1, \cdots, n\}$ telle que les couleurs de deux arêtes e_1 et e_2, qui ont un sommet en commun sont différentes: $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow c(e_1) \neq c(e_2)$.

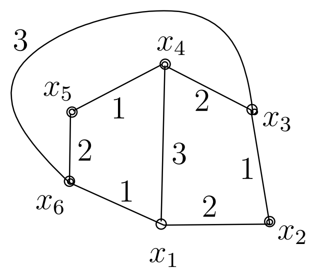

Figure 3: Coloriage d'un graphe avec 3 couleurs

La figure 3 donne un exemple de coloration des arêtes d'un graphe avec 3 couleurs.

Un graphe est dit $(p_1, \cdots, p_n)$-*coloriable* si on peut colorier ses arêtes en utilisant p_i fois la couleur i, pour $i = 1, \cdots, n$.

Dans l'exemple de la figure 3, le graphe G est $(3, 3, 2)$ coloriable (la couleur 1 est utilisée 3 fois, la couleur 2, 3 fois et la couleur 3, 2 fois).

Question 3.1. Soit G un graphe (p_1, p_2)-coloriable avec $p_1 > p_2$. Montrer que G est $(p_1 - 1, p_2 + 1)$ coloriable.

Correction G est coloriable avec deux couleurs donc chaque sommet est de degré au plus 2. G est donc formé de chemins et de cycles (pairs) deux a deux disjoints. Les cycles utilisent tous les deux couleurs équitablement. Si $p_1 > p_2$, alors il existe un chemin de longueur impaire qui utilise la couleur 1 une fois de plus que la couleur 2. Il suffit d'intervertir les deux couleurs sur ce chemin uniquement pour obtenir une $(p_1 - 1, p_2 + 1)$ coloration.

Question 3.2. Soit $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{D}^n$. Montrer que si $q_j > q_i$ avec $1 \leq j < i \leq n$, alors $(q_1, \ldots, q_j - 1, \ldots, q_i + 1, \ldots, q_n) \preccurlyeq (q_1, \ldots, q_n)$.

Correction Cas particulier de (λ, Q)-transformation $q' = qT$, avec$P = \lambda Id + (1 - \lambda)Q$, où Q échange i et j et $\lambda = (q_j - q_i - 1)/(q_j - q_i)$.

Question 3.3. Montrer que si G est $(p_1, \ldots, p_n)$-coloriable, alors G est $(q_1, \ldots, q_n)$-coloriable dès que $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et $(q_1, \ldots, q_n) \preccurlyeq (p_1, \ldots, p_n)$. On pourra s'aider, entre autres, de la réponse aux questions 2.5 et 2.6.

Correction Si $(q_1, \cdots, q_n) \preccurlyeq (p_1, \cdots, p_n)$, alors on peut passer de p à q par une suite finie de (λ, Q)-transformations, toutes de la forme donnée par la question 3.2, en utilisant le même choix d'indices pour la transposition Q que pour la question 2.5. La seule différence est qu'ici il faut un nombre fini d'étapes (au lieu d'une seule dans le cas réel) avant de réduire le nombre de coefficients différents entre x et y.

On applique à chaque étape les modifications de couleurs données à la question précédente au sous-graphe réduit aux arrêtes des deux couleurs impliquées. Cela donne après toutes les étapes une $(q_1, \cdots, q_n)$ coloration du graphe.

Tournois

Un *tournoi* $T = (X, U)$ est formé d'un ensemble fini X de n sommets et d'un ensemble U de couples (x, y). Pour deux sommets quelconques x et y avec $x \neq y$, il y a toujours soit $(x, y) \in U$ soit, $(y, x) \in U$, et pas les deux. De plus $(x, x) \notin U$. Après numérotation des sommets du tournoi, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, sa *matrice d'incidence* est une matrice M de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, avec

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

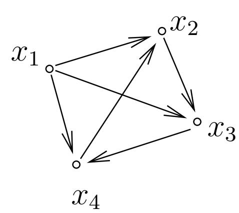

Figure 4: Tournoi à 4 sommets. Les couples $(x, y) \in U$ sont représentés par les arcs $x \to y$.

Un tournoi peut représenter une compétition sportive dans laquelle n équipes jouent toutes une fois les unes contre les autres. La présence du couple (x, y) dans U signifie que x a gagné contre y. Le *score* s_i du sommet x_i est le nombre de couples de la forme $(x_i, \cdot)$. Avec l'interprétation donnée précédemment, c'est le nombre de victoires de l'équipe x_i. Le score s du tournoi T est le vecteur des scores de ses sommets: $s = (s_1, \dots, s_n)$. La figure 4 montre un tournoi avec un score $(3, 1, 1, 1)$.

Question 3.4. Montrer qu'il existe un tournoi dont le score est $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Correction $eA(T)^T$ est le score du tournoi T.
C'est le tournoi dont la matrice d'incidence est triangulaire supérieure.

Question 3.5. Montrer que si $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ est le score d'un tournoi, alors $(s_1, \dots, s_n) \preccurlyeq (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

Correction Si s est le score d'un autre tournoi, alors $\sum s_i = C_n^2$, car c' est le nombre total de paires. Tout sous-graphe complet d'un tournoi est un tournoi. Les scores induits sur tout sous-graphe complet de taille k vérifient donc $\sum s'_i = C_k^2$. Si on choisit le sous-graphe des k plus faibles équipes, on obtient alors $\sum s'_i = C_k^2 \leq \sum s_i$. Or C_k^2 est la somme des scores des

k plus faibles équipes pour le tournoi T de la question précédente. Par la question 1.2, cela donne $s \preccurlyeq t$

Pour la question qui suit, on considère un vecteur $s = (s_1, \ldots, s_n)$ d'entiers positifs, tels que $(s_1, \ldots, s_n) \preccurlyeq (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ et aussi $s_1 \leq \cdots \leq s_n$ (triés dans l'ordre croissant). L'objet de la question est de proposer un algorithme qui construit un tournoi de score s.

$M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice initialisée à zéro: $M_{i,j} = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. La procédure `Tri`$(x, i)$ construit une matrice de permutation $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ qui trie les $i-1$ premières coordonnées de x dans l'ordre croissant et laisse les coordonnées $i, i+1, \ldots, n$ inchangées. Par exemple, si $x = (7, 4, 8, 1, 6, 3)$ et $Q \leftarrow$ `Tri`$(x, 5)$ alors $xQ = (1, 4, 7, 8, 6, 3)$ (les 4 premières coordonnées sont triées et le reste est inchangé). On considère l'algorithme suivant:

```
Tournoi(s)
Pour i décroissant de n à 1 faire {
      Pour j croissant de 1 à s_i faire { M_ij ← 1;}
      Pour j croissant de s_i + 1 à i − 1 faire { M_ji ← 1; s_j ← s_j − 1; }
      Q ←Tri(s, i);
      s ← sQ; M ← Q^{-1}MQ; }
```

(une boucle croissante de a à b avec $a > b$ n'est pas exécutée)

Question 3.6. Soit s' le vecteur s modifié par le premier passage dans la boucle sur i. Montrer que $(s'_{n-1}, \ldots, s'_1) \preccurlyeq (n-2, n-3, \ldots, 1, 0)$. En déduire que l'algorithme `Tournoi(s)` construit la matrice d'incidence M d'un tournoi de score $(s_1, \ldots, s_n)$, à une permutation près des indices.

Correction **Commentaire** *C'est sans doute la question la plus difficile du sujet.*

On montre d'abord que l'algorithme marche bien par récurrence sur n (le cas $n = 2$ est trivial). On suppose, que c'est bon pour $n-1$. On pose $u = n - 1 - s_n$ On partitionne la matrice obtenue par l'algorithme pour n en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne. On obtient une matrice $n-1 \times n-1$ dont la somme sur les lignes doit être (en commençant par la dernière ligne): $s' = (s_{n-1} - 1, \cdots, s_{n-u} - 1, s_{n-u-1}, \ldots, s_1)$ Pour finir la preuve il suffit de montrer que le score de cette sous-matrice vérifie: $s' \preccurlyeq (n-2, \cdots, 0)$ car le tri assure ensuite que le nouveau vecteur sera trié et que l'on pourra continuer la récurrence.

il reste donc à montrer que $s' \preccurlyeq (n-2, \cdots, 0)$.

Pour cela on montre que les sommes partielles $S'_k = \sum_{i=1}^k s'_i$ satisfont: $S'_k \geq C_k^2$ et $S'_{n-1} = C_{n-1}^2$.

On pose $F_k = S_k - C_k^2$. Comme $s \preccurlyeq (n-1, \cdots, 0)$, les F_k sont positifs et $F_n = 0$. On calcule:

$F_{n-1} = S_{n-1} - C_{n-1}^2 = S_n - s_n - C_{n-1}^2 = C_n^2 - s_n - C_{n-1}^2 = n - 1 - s_n = u.$

Et pour tout $k \leq u$

$F_{n-k} = F_{n-k+1} - s_{n-k+1} + C_{n-k+1}^2 - C_{n-k}^2 = F_{n-k+1} - s_{n-k+1} + n - k$. Cela donne $F_{n-k} \geq F_{n-k+1} - s_n + n - k = F_{n-k+1} + u - k + 1 \geq F_{n-k+1}$ car $s_n \geq s_{n-k+1}$ et $k \leq u$. Ainsi, $F_{n-k} \geq u$ pour tout $1 \leq k \leq u$.

Donc avec s', les F'_i sont les mêmes que les F_i si $i < n - u - 1$ et sont donc positifs. Si i entre $n - u$ et $n - 1$, $F'_i = F_i - (i - n + u - 1) \geq u - (i - n + u + 1) \geq 0$.

Enfin, $S'_{n-1} = S_n - (n-1) = C_{n-1}^2$.

4 Schur-croissance

Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *symétrique* si pour toute matrice de permutation Q et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(xQ)$.
Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *croissante* (au sens usuel) si $(x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1 \ldots, y_n)$.
Une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *Schur-croissante* si $x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Elle est *Schur-décroissante* si $-f$ est Schur-croissante.
Soit une fonction réelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$ et $x \in \mathbb{R}^{n-2}$. On définit $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, par $f_x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x)$.

Question 4.1. Montrer que si f est Schur-croissante, alors f est symétrique. Montrer que f est Schur-croissante si et seulement si elle est symétrique et Schur-croissante en ses deux premiers arguments (autrement dit, f_x est Schur-croissante pour tout $x \in \mathbb{R}^{n-2}$, si $n > 2$) *(S'inspirer de la méthode utilisée à la question 2.6).*

Correction $x \preccurlyeq xQ \preccurlyeq x$ implique par Schur croissance, $f(x) \leq f(xQ) \leq f(x)$ donc f est symétrique.

sens direct: il n'y a rien à montrer, c'est vrai par définition.
sens opposé: si f est symétrique et Schur croissante en ses deux premiers arguments, elle l'est en deux quelconques de ses arguments. si $x \preccurlyeq y$ alors il existe une suite finie $x_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_k$ telle que $x_1 = x, x_k = y$, et x_i ne diffère de x_{i+1} que par deux coordonnées (question 2.5). ainsi, $fx) \leq f(y)$. **Commentaire** *Cela rend la Schur croissance plus facile à tester: il suffit de regarder les deux premières coordonnées.*

Question 4.2. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(g(x_1), \ldots, g(x_n))$. Montrer que si ϕ est croissante au sens usuel et Schur-croissante et si g est convexe, alors ψ est Schur-croissante.

Correction On fait la preuve pour $n = 2$. Cela suffit grâce à la question précédente. $x \preccurlyeq y$ donc $x = yP$ soit $x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ et $x_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)y_1$. avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Maintenant, $\psi(x_1, x_2) = \phi(g(x_1), g(x_2)) = \phi(g(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2), g(\alpha y_2 + (1-\alpha)y_1) \leq \phi(\alpha g(y_1) + (1-\alpha)g(y_2), \alpha g(y_2) + (1-\alpha)g(y_1)) = \phi((g(y_1), g(y_2))P) \leq \psi(y_1, y_2)$.

Polygones

On considère un polygone à n côtés ($n \geq 3$) inscrit dans un cercle de rayon 1 centré en O (voir la figure 5 pour le cas $n = 6$). On appelle $A_1, \ldots, A_n$ les n points de contact successifs du polygone avec le cercle (en choisissant le premier point arbitrairement, et en tournant dans le sens trigonométrique). On note θ_i l'angle (en radian) formé par les points A_i, O, A_{i+1} si $1 \leq i < n$ et par les points A_n, O, A_1 pour θ_n.

Question 4.3. Montrer que si le centre du cercle est à l'intérieur du polygone alors l'aire du polygone est une fonction Schur-décroissante des angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

Correction Si O est à l'intérieur, alors l'aire est égale à $1/2 \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i)$. *sinus* est une fonction concave sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $\sum_i x_i$ est croissante et Schur croissante. Donc $\sum_i \sin(\theta_i)$ est Schur décroissante.

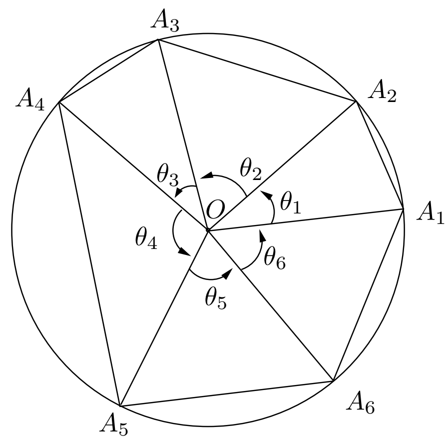

Figure 5: Polygone inscrit dans un cercle de rayon 1.

Question 4.4. Montrer que le polygone régulier a la plus grande aire parmi les polygones à n côtés inscrits dans le cercle.

Correction Avec la question précédente, , parmi tous les polygones qui contiennent O, celui de plus grande aire est le polygone régulier par la question 1.3. Enfin, si on considère un polygone qui ne contient pas O, son aire est inférieure à $\pi/2$, alors que le polygone régulier a une surface qui vaut $n/2 \sin(2\pi/n)$. Si $n \geq 4$, $n/2 \sin(2\pi/n) \geq 2 > \pi/2$. Le cas $n = 3$ est à faire à la main: Un triangle inscrit qui ne contient pas le centre à une aire inférieure à 1; le triangle régulier a une aire qui vaut $3\sqrt{3}/2 > 1$.

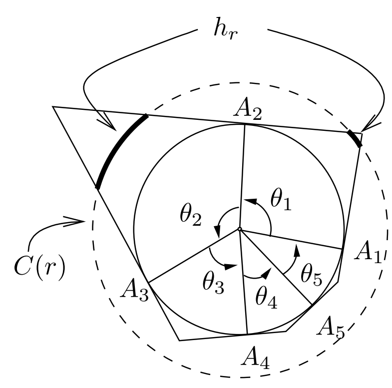

Figure 6: Polygone circonscrit au cercle unité et la fonction h_r.

On considère maintenant les polygones à n côtés ($n \geq 3$) circonscrits au cercle unité de centre O (voir la figure 6). On appelle $A_1, \dots A_n$ les n points de contacts successifs, dans l'ordre trigonométrique, du polygone avec le cercle (qui sont maintenant les points de tangence au cercle), et θ_i l'angle formé par les points A_i, O, A_{i+1} si $1 \leq i < n$ et par les points A_n, O, A_1 pour θ_n. On note $\mathcal{P}(\theta_1 \dots, \theta_n)$ le polygone ainsi formé.

On note $h_r(\theta_1, \dots, \theta_n)$ la longueur de la partie du cercle $C(r)$ (centré en O et de rayon r) qui reste dans le polygone $\mathcal{P}(\theta_1 \dots, \theta_n)$ (voir la figure 6). En particulier, $h_r(\theta_1, \dots, \theta_n) = 2\pi r$, si $r \leq 1$.

Question 4.5. Montrer que, pour tout $r \geq 0$, h_r est une fonction Schur-croissante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Correction Soit V_i un sommet du polygone P qui est à distance plus de r du centre, correspondant à l'angle θ_i.

Alors la proportion du cercle $S(r)$ "couverte" par V_i vaut $r(\theta_i - 2\cos^{-1}(1/r))$.

Pour les sommets V_i qui ne dépassent pas, la proportion vaut zéro. Ainsi, $h_r = r\sum_{i=1}^n \max(0, \theta_i - 2\cos^{-1}(1/r))$.

La fonction $\theta \to \max(0, \theta - 2\cos^{-1}(1/r))$ est convexe en θ. Par la question 4.2, h_r est Schur-croissante en $(\theta_1, \cdots \theta_n)$

Question 4.6. En déduire la forme d'un polygone P, circonscrit au cercle unité, dont l'intérieur $\overset{\circ}{P}$ a le plus petit moment de rotation, défini par:

$$\int_{\overset{\circ}{P}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Qu'en est-il pour l'aire?

Correction En coordonnées polaires,

$$\int_{\overset{\circ}{P}} x^2 + y^2 dx dy = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{h_r/r} r^2 r d\theta dr = \int_{r=0}^{\infty} h_r r^2 dr,$$

qui est une fonction croissante en h_r. Ainsi, le polygone avec le plus petit moment de rotation est le polygone régulier.

Idem pour l' aire qui vaut en coordonnées polaires $\int_{r=0}^{\infty} h_r dr$.