Épreuve de Mathématiques et Informatique

Correction.

Préliminaires

Pour tout ensemble fini E de cardinal k, on note $\mathbb{R}^E$ l'espace vectoriel de dimension k des fonctions de E vers $\mathbb{R}$. On note $\widehat{e}$ l'élément de $\mathbb{R}^E$ qui est la fonction qui à e associe 1, et à tout autre élément de E associe 0. En particulier, tout élément a de $\mathbb{R}^E$ s'écrit de façon unique $\sum_{e\in E} a_e\widehat{e}$, pour une famille de coefficients $(a_e)_{e\in E}$ — à savoir $a_e = a(e)$ pour tout $e \in E$. Les vecteurs $\widehat{e}$, $e \in E$ forment la *base canonique* de $\mathbb{R}^E$.

L'espace $\mathbb{R}^E$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$\left(\sum_{e\in E} a_e\widehat{e}\right)\cdot\left(\sum_{e\in E} b_e\widehat{e}\right) = \sum_{e\in E} a_e b_e$$

pour lequel la base $(\widehat{e})_{e\in E}$ est orthonormée. On note $|v| = \sqrt{v\cdot v}$.

On note 0 l'espace vectoriel de dimension 0. Il est réduit à l'élément 0.

On rappelle aussi que le *rang* d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^F$ est $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^E - \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{card} E - \dim \operatorname{Ker} f$.

Si A et B sont deux matrices de même largeur, la matrice $\left[\frac{A}{B}\right]$ est obtenue en plaçant toutes les lignes de A au-dessus de toutes les lignes de B.

Une *relation binaire* sur un ensemble A est un sous-ensemble de $A\times A$. Pour toute relation binaire $\to$ sur un ensemble A, on notera $x\to y$ si et seulement si (x,y) est dans $\to$. On notera d'autre part $\to^*$ la relation définie par $x\to^* y$ si et seulement s'il existe un entier $k\geq 0$, et $k+1$ éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ de A tels que $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_k = y$. La relation $\to^+$ est définie par $x\to^+ y$ si et seulement s'il existe un entier $k\geq 1$, et $k+1$ éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ de A tels que $x = x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_k = y$.

La différence ensembliste $\setminus$ est définie par $A\setminus B = \{x\in A | x\notin B\}$. La différence symétrique Δ est définie par $A\,\Delta\, B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

L'usage de la calculatrice est autorisé (et fondamentalement inutile). On pourra utiliser les résultats de questions précédentes même si on n'y a pas répondu.

1 Quelques calculs matriciels

Question 1.1. Soient $v_1, \ldots, v_{k-1}$ $k-1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^m$, et supposons qu'ils sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire $v_i\cdot v_j = 0$ pour tous i, j, $1\leq i<j<k$. Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^m$, montrer que

$$v' = v - \sum_{\substack{1\leq j<k\\ v_j\neq 0}} \frac{v_j\cdot v}{|v_j|^2} v_j$$

est orthogonal à tous les v_i, $1\leq i<k$, et que de plus l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_{k-1}, v'$ est identique à celui engendré par $v_1, \ldots, v_{k-1}, v$.

On a, pour tout i, $1\leq i<k$:

$$\begin{aligned} v_i\cdot v' &= v_i\cdot v - \sum_{\substack{1\leq j<k\\ v_j\neq 0}} \frac{v_j\cdot v}{|v_j|^2} v_i\cdot v_j \\ &= v_i\cdot v - \begin{cases} \frac{v_i\cdot v}{|v_i|^2} v_i\cdot v_i & \textit{si } v_i\neq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

par orthogonalité de v_i avec tous les v_j tels que $j \neq i$. Si $v_i = 0$, ceci vaut 0. Sinon, ceci vaut $v_i \cdot v - v_i \cdot v = 0$. Donc v_i et v sont orthogonaux dans tous les cas.

A noter que ceci fonctionne même si certains des vecteurs v_1, ..., v_{k-1} sont nuls. Les supposer non nuls comme dans l'énoncé rend la condition $v_j \neq 0$ dans la sommation superfétatoire. Mais on aura besoin de considérer des vecteurs possiblement nuls dans la suite.

Toute combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v'$ est aussi combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v$, car v' est lui-même combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v$. Réciproquement, v est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v'$:

$$v = v' + \sum_{\substack{1 \leq j < k \\ v_j \neq 0}} \frac{v_j \cdot v}{|v_j|^2} v_j$$

donc toute combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v$ est aussi combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{k-1}, v'$, d'où le résultat.

Commentaire. *Cette question est évidente. On demande donc particulièrement au candidat d'être soigneux.*

Barême $[0, 5]$ **:** $0,5$ *point.*

Question 1.2. On considère le programme suivant :

1. GS1(A, m, n, k)
2.   **pour** j **de** 1 **à** $k-1$ **faire**
3. $s := 0$; $x := 0$;
4.   **pour** i **de** 1 **à** m **faire**
5. $s := s + A[i,j] \times A[i,k]$; $x := x + A[i,j] \times A[i,j]$;
6.   **si** $x \neq 0$ **alors pour** i **de** 1 **à** m **faire**
7. $A[i,k] := A[i,k] - s \times A[i,j]/x$;

On supposera que A est un tableau de m lignes et n colonnes, et que $1 \leq k \leq n$. L'élément $A[i,j]$ est donc défini pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La $j$ième colonne $A[\_, j]$ de A sera vue comme un vecteur v_j, et on supposera qu'en entrée de GS1, les vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sont orthogonaux deux à deux.

Que calcule GS1 (A, m, n, k) ?

Clairement, les lignes 3–5 calculent $s = v_j \cdot v_k$ et $x = v_j \cdot v_j = |v_j|^2$. La boucle des lignes 6 et 7 retire donc $sv_j/x = v_j \cdot v_k/|v_j|^2 v_j$ de la kième colonne de A, à condition que $x \geq 0$, c'est-à-dire à condition que $v_j \neq 0$. L'effet de la procédure GS1 *est donc de remplacer la kième colonne v_k de A par*

$$v_k - \sum_{\substack{1 \leq j < k \\ v_j \neq 0}} \frac{v_j \cdot v_k}{|v_j|^2} v_j$$

Par la question précédente, GS1 *remplace donc la kième colonne v_k de A par une colonne v'_k telle que les k premières colonnes de A sont orthogonales deux à deux, ces colonnes engendrant le même espace vectoriel que celles de la matrice A fournie en entrée.*

Commentaire. *Cette question aussi est évidente. On donnera tous les points (il n'y en aura pas beaucoup) aux candidats qui auront dit* explicitement *que l'effet de* GS1 *est de remplacer la kième colonne v_k de A par $v_k - \sum_{1\leq j<k, v_j\neq 0} \frac{v_j \cdot v_k}{|v_j|^2} v_j$.*

Barême $[0,5]$ **:** $0,5$ *point.*

Question 1.3. Montrer que le programme

1. GS(A, m, n)
2.   **pour** k **de** 1 **à** n **faire**
3.   GS1 (A, m, n, k)

remplace le tableau A de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ par un tableau de n vecteurs orthogonaux engendrant le même sous-espace vectoriel.

Montrer que la complexité de GS (A, m, n), c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires (affectations et opérations arithmétiques) effectuées par GS (A, m, n), est en $O(n^2 m)$.

Soit A_0 la valeur de la matrice A en entrée de GS. *On va montrer les invariants :*

1 *avant l'appel de* GS1 *en ligne* 3*, les colonnes* 1 *à* $k-1$ *de A sont orthogonales deux à deux, et les colonnes de A engendrent le même sous-espace que celles de A_0 ;*

2 *après l'appel de* GS1 *en ligne* 3*, les colonnes* 1 *à* k *de A sont orthogonales deux à deux, et les colonnes de A engendrent le même sous-espace que celles de A_0 ;*

L'invariant 1 est respecté, trivialement, quand $k=1$. À k fixé, 1 implique 2, par la question précédente. Finalement, par récurrence sur k, si 2 est vrai pour une valeur de k donnée, $k<n$, alors 1 est vrai pour $k+1$. L'invariant 2 étant vrai pour $k=n$, on en déduit le résultat.

GS1 (A, k) *s'exécute en $k-1$ tours de boucle externe, chaque tour effectuant deux opérations en ligne* 3*, am opérations en lignes* 4–5 *(pour une constante $a>0$), et bm opérations en lignes* 6–7 *(pour une constante $b>0$), pour un total de $(a+b)(k-1)m+c$ opérations, où c est une constante représentant le nombre d'opérations d'initialisations de boucle externe, d'entrée et de sortie de* GS1. GS *s'exécute donc en*

$$\sum_{k=1}^{n}((a+b)(k-1)m+c) = (a+b)\frac{n(n-1)m}{2} + cn = O(n^2 m)$$

opérations élémentaires.

Commentaire. *La partie importante de cette question est celle du calcul de la complexité. Il est tolérable de ne pas prendre en compte la constante c dans le calcul. Par contre, argumenter selon les lignes de "*GS1 (A, k) *s'exécute en* $k-1$ *tours de boucle externe, chaque tour effectuant* $O(m)$ *opérations en lignes* 4–5 *et* $O(m)$ *opérations en lignes* 6–7*, pour un total de* $O(km)$ *opérations" est incorrect, le grand O représentant une constante multiplicative qui ne serait a priori pas indépendante de* k *ou de* n*.*

Barême $[1,5]$ **:** $0,5$ *point pour la correction,* $1,0$ *pour le calcul de la complexité.*

Question 1.4. Pour toute matrice A de m lignes et n colonnes, en déduire qu'on peut calculer dim Ker A en $O(n^2m)$ opérations élémentaires.

L'image de A *est engendrée par les vecteurs colonnes de* A*, et donc par les vecteurs colonnes de la matrice* A' *obtenue après appel de* GS (A, m, n)*. Or les colonnes non nulles de* A' *forment une base (orthogonale) de* Im A*. Donc* dim Im A *est le nombre de colonnes non nulles de* A'*. Or, comme rappelé dans les préliminaires,* dim Im $A = n -$ dim Ker A*. Comme* A *et* A' *ont* n *colonnes,* dim Ker A *est* n *moins le nombre de colonnes non nulles de* A'*, ou bien encore le nombre de colonnes nulles de* A'*. On peut compter ce nombre de colonnes nulles par le programme :*

$p := 0$ *;*
pour j **de** 1 **à** n **faire**
    $b :=$ `faux` *;*
    pour i **de** 1 **à** m **faire**
        si $A'[i, j] \neq 0$ **alors** $b :=$ `vrai` *;*
    si non b **alors** $p := p + 1$ *;*

qui s'exécute en temps $O(mn)$*, et retourne* $p =$ dim Ker $A' =$ dim Ker A*. Additionné au temps* $O(n^2m)$ *de* GS*, on obtient un temps* $O(n^2m)$*.*

Commentaire. *On ne demande pas d'écrire le programme ci-dessus, et on n'en tiendra donc pas compte dans la notation. Les deux choses importantes sont : la formule du rang, permettant de calculer* dim Ker A *en fonction de* dim Im A *; et le calcul de la complexité :* $O(mn)$ *plus le nombre d'opérations du calcul de GS.*

Barême $[1,0]$ **:** *Si fait comme ci-dessus,* $0,5$ *point pour la formule du rang,* $0,5$ *pour le calcul correct de la complexité.*

Question 1.5. En considérant la transposée A^t de A, en déduire que l'on peut calculer dim Ker A en $O(m^2n)$ opérations élémentaires.

Un vecteur x *est dans* Ker A *si et seulement si* $\sum_{j=1}^{n} A[i, j]x_j = 0$ *pour tout* i*,* $1 \leq i \leq m$*. Mais* $A[i, \_]$ *est la iième ligne de* A*, et* $\sum_{j=1}^{n} A[i, j]x_j$ *est le produit scalaire de cette iième ligne avec* x*. Donc* x *est dans* Ker A *si et seulement si* x *est orthogonal avec toutes les lignes de* A*.*

Soit A^t la transposée de A. Les éléments de Ker A *sont donc les vecteurs orthogonaux à toutes les colonnes de A^t, donc orthogonaux à toutes les colonnes de $A' =$ GS (A^t, n, m). Or* Im A' *est engendré par ses colonnes non nulles, donc la dimension de son orthogonal est le nombre de ses colonnes nulles, ce qui prend un temps $O(mn)$ à calculer, comme à la question précédente. Calculer A^t prend un temps $O(mn)$, et calculer A' prend un temps $O(m^2 n)$, d'où le résultat.*

Commentaire. *Cette question est évidente. On insistera sur le calcul correct et rigoureux de la complexité.*
Barême $[0,5]$ **:** $0,5$ *point.*

Question 1.6. En déduire un algorithme, fondé sur les algorithmes des questions précédentes, calculant dim Ker A en $O(\min(m,n)^2 \max(m,n))$ opérations élémentaires.

Il suffit de comparer m à n. Si $m < n$, alors on utilise l'algorithme de la question 1.5, sinon celui de la question 1.4.

Commentaire. *On ne demande pas d'écrire de programme. On notera uniquement le fait qu'il soit remarqué ou non qu'il suffit de comparer m à n, et d'utiliser l'un ou l'autre algorithme.*
Barême $[0,5]$ **:** $0,5$ *point.*

Total des points pour la partie 1 : $[4,5]$**.**

2 Complexes simpliciaux et homologie

On appelle *complexe simplicial* tout triplet $(V, \leq, K)$, où V est un ensemble fini de *sommets*, $\leq$ est un ordre total sur V, et K est un ensemble de parties non vides de V, vérifiant la condition :

(†) si $\alpha \in K$ et $\beta \subset \alpha$, $\beta \neq \emptyset$, alors $\beta \in K$.

On notera souvent K le complexe simplicial $(V, \leq, K)$, par abus de notation. On notera $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Les éléments α de K sont appelés les *simplexes* de K. La *dimension* dim α est par convention card $\alpha - 1$. En particulier, la dimension de tout simplexe de la forme $\{x\}$ est 0.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note K_p l'ensemble des simplexes de dimension p de K.

La relation $\sqsubset^+$ dénote l'inclusion stricte entre simplexes : $x \sqsubset^+ y$ si et seulement si x est strictement inclus dans y ; on dit alors que x est une *face* de y. Par exemple, $\{b, c\}$ est une face de dimension 1 de $\{b, c, d\}$. On dit que x est une *face directe* de y, et l'on note $x \sqsubset y$ si et seulement si x est une face de y et dim $x =$ dim $y - 1$.

Il est parfois utile de considérer une représentation graphique des complexes simpliciaux. Par exemple, le complexe simplicial de gauche de la figure 1 est formé des simplexes $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ (les trois segments, de dimension 1), et $\{u\}$, $\{v\}$, $\{w\}$ (leurs faces) — les

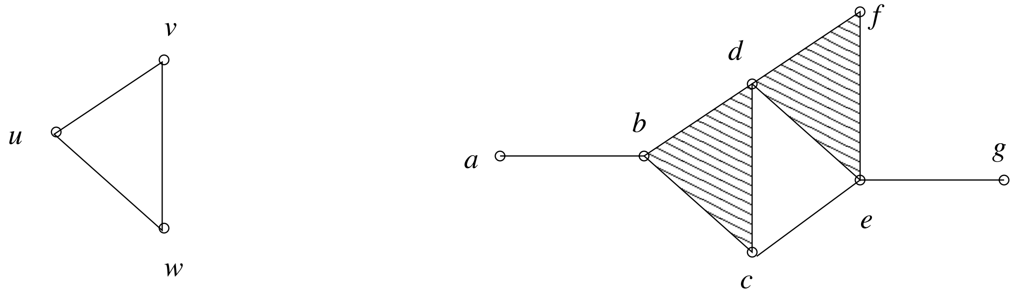


FIG. 1 – La représentation graphique d'un complexe simplicial

sommets sont représentés comme des points. Le diagramme de droite est la représentation du complexe simplicial $(V, \leq, K)$ avec $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, et où les simplexes sont les faces triangulaires (les simplexes de dimension 2) $\{b, c, d\}$ et $\{d, e, f\}$, les segments (dimension 1) $\{a, b\}$, $\{c, e\}$ et $\{e, g\}$, et tous leurs sous-ensembles non vides.

Pour tout simplexe $\alpha = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ de K de dimension p, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$, pour tout i, $0 \leq i \leq p$, on pose

$$\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\}$$

où $\setminus$ désigne la différence ensembliste. On appelle $\partial_p^i \alpha$ la *face numéro i* de α.

Question 2.1. Montrer l'égalité

$$\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha = \partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha \tag{1}$$

pour tout simplexe α de K de dimension $p \geq 1$, et pour tous i, j tels que $0 \leq i < j \leq p$.

Soit $\alpha = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$. $\partial_p^j \alpha = \alpha \setminus \{x_j\}$ et $\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha$ est ∂_{p-1}^i privé de son élément numéro i, c'est-à-dire de x_i (puisque $i < j$). Donc $\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha = \alpha \setminus \{x_i, x_j\}$.

De l'autre côté, $\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\}$, et $\partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha$ est $\alpha \setminus \{x_i\}$ privé de son élément numéro $j-1$, c'est-à-dire de x_j (puisque $j - 1 \geq i$). Donc $\partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i, x_j\}$.

Commentaire. *Il est important de remarquer qu'enlever l'élément i décale l'élément j de -1. L'important c'est l'idée que les deux côtés de l'égalité consistent à enlever les deux mêmes éléments.*

Barême $[1, 0]$ **:** 1 *point.*

Question 2.2. Étant donné un complexe simplicial K, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note C_p l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{K_p}$. (On rappelle que K_p est l'ensemble des simplexes de dimension p de K.) Par extension, on notera C_{-1} l'espace vectoriel 0 réduit à un seul élément noté aussi 0. On appelle tout vecteur de C_p une *chaîne* de dimension p.

On pose $d_p : C_p \to C_{p-1}$, pour tout $p \geq 0$, l'unique application linéaire telle que

$$d_p(\widehat{\alpha}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

si $p \geq 1$, et telle que $d_p(\alpha) = 0$ si $p = 0$. Autrement dit, d_0 est l'application nulle et pour tout $p \geq 1$, pour tout vecteur $\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha}$ de C_p,

$$d_p\left(\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha}\right) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

On appelle d_p l'opérateur *bord*. Montrer que $d_{p-1} \circ d_p$ est l'application nulle pour tout $p \geq 1$. En déduire que $\mathrm{Im}\ d_p \subset \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$.

Il suffit de montrer que $d_{p-1}(d_p(\widehat{\alpha})) = 0$ pour tout α de dimension $p \geq 1$. Si $p = 1$, c'est évident, car d_0 est l'application nulle. Sinon :

$$\begin{aligned}
d_{p-1}(d_p(\widehat{\alpha})) &= d_{p-1}\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \widehat{\partial_p^j \alpha}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j d_{p-1}(\widehat{\partial_p^j \alpha}) \\
&= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=j}^{p-1} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1}^{p} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1}^{p} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha}
\end{aligned}$$

par (1). Dans la première sommation, posons $i' = j - 1$, $j' = i$, de sorte que $0 \leq j' \leq i' - 1 \leq p - 1$, et $(-1)^{i+j} = (-1)^{i'+j'+1} = -(-1)^{i'+j'}$. Donc

$$d_{p-1}(d_p(\widehat{\alpha})) = \sum_{0 \leq j' \leq i' \leq p-1} -(-1)^{i'+j'} \widehat{\partial_{p-1}^{i'} \partial_p^{j'} \alpha} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1}^{p} (-1)^{i+j} \widehat{\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha} = 0$$

On en déduit que, pour tout $v \in \mathrm{Im}\ d_p$, comme v est de la forme $d_p(w)$ pour un certain $w \in C_p$, on a $d_{p-1}(v) = d_{p-1}(d_p(w)) = 0$, donc $v \in \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$. Donc $\mathrm{Im}\ d_p \subset \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$.

Commentaire. *Il ne semble pas qu'on puisse éviter le calcul ci-dessus. Les aspects importants de ce calcul sont : le découpage de la sommation entre une somme sur tous les $i < j$ et sur tous les $i \geq j$; le reparamétrage de l'une des sommes ; l'observation que les deux sommes maintenant s'annulent par la question précédente.*

Barème $[1,5]$ **:** $1,5$ *points pour le calcul (*$0,5$ *par point important).* 0 *point pour la conséquence triviale que* $\mathrm{Im}\ d_p \subset \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$.

Question 2.3. Le sous-espace vectoriel $Z_p = \mathrm{Ker}\ d_p$ de C_p, $p \geq 0$, est l'ensemble des *cycles* de dimension p. Le sous-espace vectoriel $B_p = \mathrm{Im}\ d_{p+1}$ de C_p, $p \geq 0$, est l'ensemble des *bords* de dimension p. Par la question 2.2, B_p est aussi un sous-espace vectoriel de Z_p ; autrement dit, tout bord est un cycle. On note H_p l'orthogonal de B_p dans Z_p. H_p est le *p-ième espace vectoriel d'homologie* de K.

La dimension β_p de H_p est appelé le *p-ième nombre de Betti* de K. D'autre part, la *caractéristique d'Euler* de K est

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \mathrm{card}\ K_p$$

Montrer le *théorème d'Euler-Poincaré* :

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p \tag{2}$$

Notons d'abord que comme K est fini, card K_p *est nul pour p assez grand. Donc la somme définissant $\chi(K)$ est une somme finie, et est donc bien définie.*

De même, comme card $K_p = \dim C_p$, *C_p est l'espace vectoriel 0 pour p assez grand, donc β_p est nul pour p assez grand. Donc la somme $\sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p$ est elle aussi bien définie.*

On remarque maintenant que, comme H_p est l'orthogonal de B_p dans Z_p,

$$\beta_p = \dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p \tag{$*$}$$

pour tout $p \geq 0$. Ensuite, (et ceci a été rappelé dans les préliminaires, à propos du rang), on sait que pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^F$, $\dim \mathrm{Im}\ f + \dim \mathrm{Ker}\ f = \mathrm{card}\ E$. *En particulier,*

$$\dim B_p + \dim Z_{p+1} = \dim C_{p+1} = \mathrm{card}\ K_{p+1} \tag{$**$}$$

pour tout $p \geq 0$. Finalement, comme d_0 est la fonction nulle, $Z_0 = \mathrm{Ker}\ d_0 = C_0$, *donc*

$$\dim Z_0 = \dim C_0 = \mathrm{card}\ K_0 \tag{$***$}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p (\dim Z_p - \dim B_p) \qquad \textit{(par } (*)\textit{)} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \dim Z_p - \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \dim B_p \end{aligned}$$

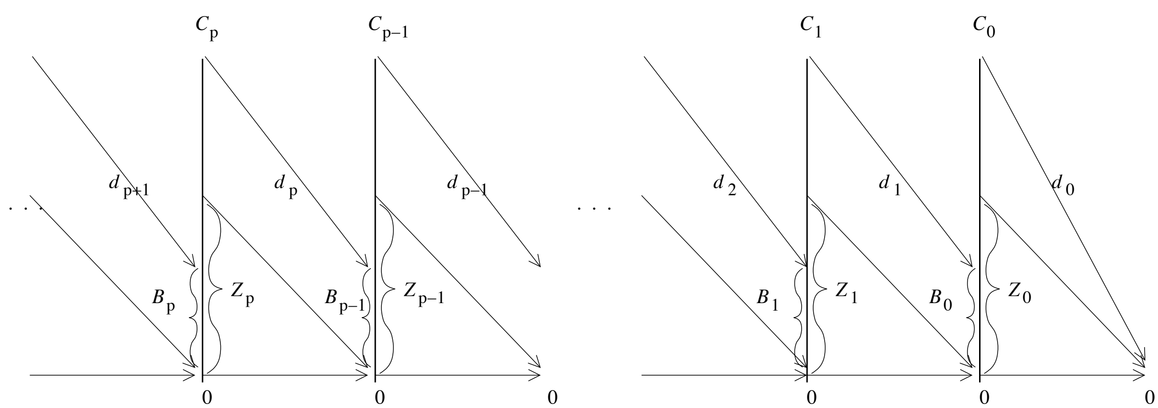
$$\begin{aligned}
&= \dim Z_0 + \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{p+1} \dim Z_{p+1} - \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \dim B_p \\
&= \dim Z_0 - \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p (\dim Z_{p+1} + \dim B_p) \\
&= \dim Z_0 - \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_{p+1} \qquad \textit{(par } (**)\textit{)} \\
&= \text{card } K_0 - \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_{p+1} \qquad \textit{(par } (***)\textit{)} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_p = \chi(K)
\end{aligned}$$

Commentaire. *On ne tiendra pas rigueur au candidat qui n'aura pas justifié que la somme définissant $\chi(K)$ ou le côté droit de (2) était bien définie.*

La seule difficulté ici est de réorganiser la sommation comme il faut, et de penser à utiliser la formule du rang au bon endroit.

Il faut faire attention à bien traiter à part le terme en dimension 0 !

Pour la suite du sujet, il est important de s'approprier une certaine intuition sur la construction des espaces vectoriels d'homologie. L'idée fondamentale est décrite dans le diagramme suivant, où les lignes verticales en gras sont censées représenter une énumération en colonne de vecteurs de base des B_p, des Z_p, et des C_p. Les H_p sont les interstices entre Z_p et B_p.



Barême $[2,0]$ **:** $1,5$ *point pour un calcul correct en dimensions* ≥ 1 *;* $0,5$ *point pour un calcul rigoureux incluant le cas spécial du terme de dimension* 0.

Question 2.4. Calculer les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler du complexe simplicial de gauche de la figure 1, pour l'ordre $u < v < w$.

C_0 est l'espace vectoriel de dimension 3 de base $\widehat{\{u\}}$, $\widehat{\{v\}}$, $\widehat{\{w\}}$. C_1 est l'espace vectoriel de dimension 3 de base $\widehat{\{u,v\}}$, $\widehat{\{u,w\}}$, $\widehat{\{v,w\}}$. Donc d_1 est l'application

linéaire de matrice

$$\begin{array}{c} \\ \{u,v\} \\ \{u,w\} \\ \{v,w\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \{u\} & \{v\} & \{w\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Son noyau Z_1 *est l'espace des vecteurs* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *tels que* $x = y = z$. *En particulier,* Z_1 *est de dimension* 1. *Il s'ensuit que l'image de* d_1 *est un espace vectoriel de dimension* 2. *On voit que la somme des coordonnées de tout élément de l'image est nulle, donc l'image* B_0 *de* d_1 *est l'hyperplan des* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *tels que* $x + y + z = 0$.
Comme $Z_0 = C_0$ *est de dimension* 3, $\beta_0 = \dim H_0 = \dim Z_0 - \dim B_0 = 3-2 = 1$.
Pour tout $p \geq 2$, C_p *est l'espace vectoriel* 0, *en particulier* $B_p = 0$ *pour tout* $p \geq 2$, *et* $Z_p = 0$ *pour tout* $p \geq 2$. *Comme* $C_2 = 0$, *l'image* B_1 *de* d_2 *est* 0, *donc* $\beta_1 = \dim H_1 = \dim Z_1 - \dim B_1 = 1 - 0 = 1$.
D'autre part, pour tout $p \geq 2$, $\beta_p = \dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p = 0 - 0 = 0$.
On a donc $\chi(K) = 1 - 1 = 0$. *On vérifie que* $\chi(K) = \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \mathrm{card}\ K_p = 3 - 3 = 0$. *Bien sûr, on pouvait aussi calculer directement* $\chi(K)$, *et s'épargner le calcul de* β_1, *qu'on pouvait déduire de* β_0 *en utilisant la question précédente.*

Commentaire. *L'intérêt de cette question est de faire réfléchir le candidat sur un exemple à quels moyens l'on a pour calculer des nombres de Betti en pratique. L'usage des matrices devrait s'imposer, et ainsi l'aider à aborder la partie 3.*
On notera en fonction de la correction des réponses ($\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, *tous les autres étant nuls).*
Barême $[1, 0]$ **:** 1 *point.*

Total des points pour la partie 2 : $[5, 5]$**.**

3 Calcul des nombres de Betti

Dans cette partie, on va concevoir des algorithmes pour calculer les nombres de Betti d'un complexe simplicial $(V, \leq, K)$. Pour ceci, on choisit une énumération des simplexes de dimension p de K, pour chaque $p \in \mathbb{N}$; on notera $\alpha_1^{(p)}$, …, $\alpha_{\mathrm{card}\ K_p}^{(p)}$ les simplexes de dimension p de K. On dit que le *numéro* de $\alpha_j^{(p)}$ est j. K est alors représenté à l'aide des données suivantes :

- un entier n supérieur ou égal à la dimension de tout simplexe de K ;
- un tableau c, tel que $c[p]$ est le nombre de simplexes de K de dimension p, $0 \leq p \leq n$;

– un tableau $face$, tel que $face[p, j, i]$ est le numéro du simplexe $\partial_p^i \alpha_j^{(p)}$, pour tous $1 \leq p \leq n$, $1 \leq j \leq c[p]$, $0 \leq i \leq p$.

L'ordre $\leq$ sur V est donné par $\alpha_1^{(0)} < \alpha_2^{(0)} < \ldots < \alpha_{c[0]}^{(0)}$. On notera que, pour tous p et j fixés, tous les $face[p, j, i]$, $0 \leq i \leq p$, sont des entiers distincts.

Par exemple, le complexe simplicial de droite de la figure 1 sera représenté par :

– $n = 2$;
– $c[0] = 7$, $c[1] = 9$, $c[2] = 2$;
– En numérotant les simplexes comme suit :

dimension 0 :

1	2	3	4	5	6	7
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{f\}$	$\{g\}$

dimension 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$	$\{c,e\}$	$\{d,e\}$	$\{d,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,g\}$

dimension 2 :

1	2
$\{b,c,d\}$	$\{d,e,f\}$

le tableau $face[p, j, i]$ est donné par :

$face[1, j, i] =$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	3	4	4	5	5	6	6	7
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

$face[2, j, i] =$

$i \backslash j$	1	2
0	4	8
1	3	7
2	2	6

Question 3.1. On identifie les opérateurs bord $d_p : C_p \to C_{p-1}$ à leurs matrices, en choisissant pour tout C_q sa base standard $\widehat{\alpha}_1^{(q)}, \ldots, \widehat{\alpha}_{c[q]}^{(q)}$. On note d_p^t la matrice transposée de d_p. Montrer que

$$H_p = \text{Ker} \left[\frac{d_{p+1}^t}{d_p} \right]$$

H_p est l'intersection de $Z_p = \text{Ker } d_p$ et de l'orthogonal de $B_p = \text{Im } d_{p+1}$. Or un système générateur de $\text{Im } d_{p+1}$ est formé des vecteurs colonnes de la matrice d_{p+1}. En particulier, un vecteur x est dans l'orthogonal de B_p si et seulement si le produit scalaire de x avec chaque colonne de d_{p+1} est nul, si et seulement si le produit scalaire de chaque ligne de d_{p+1}^t avec x est nul, si et seulement si $d_{p+1}^t x = 0$. Comme x est dans Z_p si et seulement si $d_p x = 0$, x est dans $H_p = Z_p \cap B_p^\perp$ si et seulement si

$$\left[\frac{d_{p+1}^t}{d_p} \right] x = 0$$

D'où le résultat.

Commentaire. *Facile. Les deux arguments importants sont : être dans l'orthogonal de B_p c'est être dans le noyau de d_{p+1}^t ; et pour représenter l'intersection* *de deux noyaux, il suffit de mettre les matrices des deux applications linéaires concernées l'une au-dessus de l'autre.*

Barême $[0,5]$ **:** $0,5$ *point.*

Question 3.2. En déduire, ainsi que de la partie 1, un algorithme prenant en entrée une représentation $(n, c, face)$ d'un complexe simplicial K, et un entier naturel p, et retournant le nombre de Betti β_p de K. En particulier, on demande d'écrire effectivement le programme construisant les matrices impliquées, dans le style des programmes donnés en question 1.2 et 1.3.

Combien d'opérations élémentaires nécessite cet algorithme ?

Par convention, on pose $c[p] = 0$ *pour tout* $p > n$ *et tout* $c < 0$. *Il suffit de construire la matrice* $A = \left[\frac{d^t_{p+1}}{d_p}\right]$, *et d'appliquer ensuite l'algorithme de la question 1.6. Cette matrice a* $\dim C_{p-1} + \dim C_{p+1} = c[p-1] + c[p+1]$ *lignes et* $\dim C_p = c[p]$ *colonnes, donc ce dernier algorithme nécessite* $O(\min(c[p], c[p-1]+c[p+1])^2, \max(c[p], c[p-1]+c[p+1]))$ *opérations élémentaires. La construction de la matrice* A *elle-même peut s'effectuer en allouant un tableau de* $c[p-1]+c[p+1]$ *lignes et* $c[p]$ *colonnes, puis en exécutant :*

// *initialisation.*
pour i **de** 1 **à** $c[p-1] + c[p+1]$ **faire**
    pour j **de** 1 **à** $c[p]$ **faire**
        $A[i, j] := 0$;
// *remplissage de la partie haute,* d^t_{p+1}.
pour i **de** 1 **à** $c[p+1]$ **faire**
    $s := 1$;
    pour j **de** 0 **à** $p+1$ **faire**
        $A[i, face[p+1, j, i]] := s$; $s := -s$;
// *remplissage de la partie basse,* d_p.
pour j **de** 1 **à** $c[p]$ **faire**
    $s := 1$;
    pour i **de** 0 **à** p **faire**
        $A[c[p+1] + face[p, j, i], j] := s$; $s := -s$;

ce qui prend un temps $O(c[p](c[p-1] + c[p+1]) + pc[p+1] + pc[p])$. *Noter qu'on a utilisé le fait que tous les* $face[p, j, i]$ *sont distincts lorsque* p *et* j *sont fixés, et* i *varie, pour ne pas avoir d'addition à effectuer. On obtient donc une complexité totale de*

$$O(\min(c[p], c[p-1] + c[p+1])^2. \max(c[p], c[p-1] + c[p+1]) + p(c[p] + c[p+1]))$$

Commentaire. *Le premier point important de cette question est d'effectivement écrire un programme, avec des bornes de boucles correctes, suffisamment clair et expliqué. Il n'est pas nécessaire d'écrire un programme qui résout tout le problème.*

Le principe est : remplir les matrices, puis appeler le programme de la question 1.6. On ne donnera pas tous les points aux programmes "monstres", par exemple ceux qui cherchent à résoudre directement le problème sans remplir les matrices d'abord et sont incompréhensibles.

En revanche, on ne tiendra pas rigueur au candidat qui, comme dans la correction ci-dessus, n'écrit pas explicitement l'appel final à la procédure de la question 1.6.

Le second point important est le calcul de la complexité, qui doit inclure explicitement le calcul du temps de remplissage des matrices.

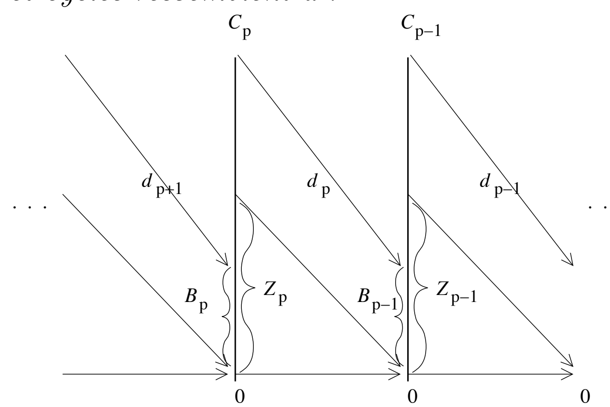
Barême $[2, 5]$ **:** 2 *points pour l'écriture du programme, clair (par lui-même, ou à l'aide de commentaires) et avec des indices de boucles corrects.* $0, 5$ *point pour le calcul de la complexité.*

Question 3.3. Soit $(V, \leq, K)$ un complexe simplicial , et soit γ un sous-ensemble non vide de V qui n'est pas dans K, mais dont tous les sous-ensembles stricts sont dans K. On note que $K \cup \{\gamma\}$ est un complexe simplicial.

Posons $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les nombres de Betti de K, $(\beta'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ceux de $K' = K \cup \{\gamma\}$. Soit d'_p l'opérateur bord de K', et disons que γ *crée un cycle dans* K (de dimension $p-1$) si et seulement si $d'_p(\widehat{\gamma}) \in \mathrm{Im}\, d_p$.

Montrer que, si γ crée un cycle dans K, alors $\beta'_p = \beta_p + 1$ et $\beta'_q = \beta_q$ pour tout $q \neq p$; et si γ ne crée pas de cycle dans K, alors $p \geq 1$, $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1} - 1$ et $\beta'_q = \beta_q$ pour tout $q \neq p - 1$.

L'idée importante est la suivante. Avant de rajouter le simplexe γ à K, les espaces de chaînes, bords et cycles ressemblent à :



Lorsqu'on ajoute γ, la dimension de C_p augmente de 1. Si γ crée un cycle, l'image ne change pas en dimension $p-1$ (la colonne C_{p-1}) mais par la formule du rang Z_p doit augmenter d'une dimension ; rien d'autre ne changeant, β_p augmente de 1 et les autres nombres de Betti restent inchangés. Si γ ne crée pas de cycle, B_{p-1} augmente d'une dimension, donc β_{p-1} décroît de 1, les autres nombres de Betti restant de nouveau inchangés.

Montrons-le plus formellement. Notons B'_q, Z'_q, C'_q, H'_q les espaces vectoriels des bords, des cycles, des chaînes et d'homologie de dimension q de K'. Clairement $C'_q = C_q$ pour tout $q \neq p$, et C_p est l'hyperplan de C'_p orthogonal à $\widehat{\gamma}$.

Si $q \neq p, p-1$, alors $Z'_q = \mathrm{Ker}\ d'_q = Z_q$. En effet, comme $q \neq p$, pour tout $\alpha \in C'_q = C_q$, $d'_q\alpha = 0$ si et seulement si $d_q\alpha = 0$ si et seulement si $\alpha \in Z_q$. D'autre part, $B'_q = \mathrm{Im}\ d'_{q+1} = \mathrm{Im}\ d_{q+1} = B_q$ car $q+1 \neq p$. Donc $H'_q = H_q$, donc $\beta'_q = \beta_q$.

Calculons β'_p. On a $B'_p = B_p$. Calculons donc $Z'_p = \mathrm{Ker}\ d'_p$. D'abord, clairement Z'_p contient Z_p. Ensuite, tout élément z de C'_p s'écrit de façon unique $x + a\widehat{\gamma}$, $x \in C_p$, $a \in \mathbb{R}$. Alors $x + a\widehat{\gamma}$ est dans Z'_p si et seulement si $d_p(x) + ad'_p(\widehat{\gamma}) = 0$.

Si $d'_p(\widehat{\gamma}) \notin \mathrm{Im}\ d_p$, ceci implique $a = 0$ et $d_p(x) = 0$, c'est-à-dire $z \in Z_p$. Donc $Z'_p = Z_p$ dans ce cas, d'où $H'_p = H_p$ et donc $\beta'_p = \beta_p$.

Si $d'_p(\widehat{\gamma}) \in \mathrm{Im}\ d_p$, disons $d'_p(\widehat{\gamma}) = d_p(y)$, alors $x + a\widehat{\gamma}$ est dans Z'_p si et seulement si $d_p(x) + bd_p(y) = 0$. Les solutions de cette équation sont : b quelconque, et $x = -by + x'$ pour n'importe quel $x' \in Z_p$. Donc $\dim Z'_p = \dim Z_p + 1$, d'où $\beta'_p = \beta_p + 1$.

Calculons maintenant β'_{p-1} sous l'hypothèse $p \geq 1$. On a $Z'_{p-1} = Z_{p-1}$. D'autre part $\dim B'_{p-1}$ est le rang de d'_p, c'est-à-dire $\dim C_p + 1 - \dim \mathrm{Ker}\ d'_p$. Donc, si $d'_p(\widehat{\gamma}) \in \mathrm{Im}\ d_p$, alors $\dim B'_{p-1} = \dim C_p + 1 - (\dim \mathrm{Ker}\ d_p + 1) = \dim C_p - \dim \mathrm{Ker}\ d_p$ est le rang de d_p, c'est-à-dire $\dim B_{p-1}$; donc $\beta_{p-1} = \dim Z'_{p-1} - \dim B'_{p-1} = \dim Z_{p-1} - \dim B_{p-1} = \beta_{p-1}$. Si $d'_p(\widehat{\gamma}) \notin \mathrm{Im}\ d_p$, alors $\dim B'_{p-1} = \dim C_p + 1 - \dim \mathrm{Ker}\ d'_p = \dim C_p + 1 - \dim \mathrm{Ker}\ d_p = \dim B_{p-1} + 1$, donc $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1} - 1$.

On conclut, en remarquant que si $d'_p(\widehat{\gamma}) \notin \mathrm{Im}\ d_p$, alors $\mathrm{Im}\ d_p$ est de dimension au moins 1, ce qui exclut le cas $p = 0$: donc $p \geq 1$.

Commentaires. *Une explication intuitive mais claire comme celle présentée en introduction à la solution de cette question suffira à donner 75% des points. Le traitement formel est un plus, à condition d'être précis.*

Un point subtil est que l'on doit vérifier que si γ ne crée pas de cycle, alors $p \geq 1$. C'est évident (on ne peut pas ne pas être dans l'image de d_0, qui est contenue dans l'espace réduit à 0.)

Barème $[4, 0]$ **:** $2,5$ *points pour un argument expliquant pourquoi les nombres de Betti concernés augmentent ou diminuent de 1. 1 point s'il est bien vérifié que les autres ne changent pas. 0,5 pour la vérification de $p \geq 1$ dans le cas où γ ne crée pas de cycle.*

Question 3.4. Soient K et K' deux complexes simpliciaux. On dit que K est obtenu à partir de K' en *contractant* une face β de K' si et seulement s'il existe une face directe α de β telle que $K = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. (Un exemple est donné en figure 2.) Montrer que $K \cup \{\alpha\}$ est un complexe simplicial, mais pas $K \cup \{\beta\}$. Montrer que α crée un cycle dans K, et que β ne crée pas de cycle dans $K \cup \{\alpha\}$. En déduire que K et K' ont les mêmes nombres de Betti.

Pour montrer que $K \cup \{\alpha\}$ est un complexe simplicial, il suffit de vérifier que toutes les faces de α sont dans $K \cup \{\alpha\}$. Or comme K' est un complexe simplicial, toutes

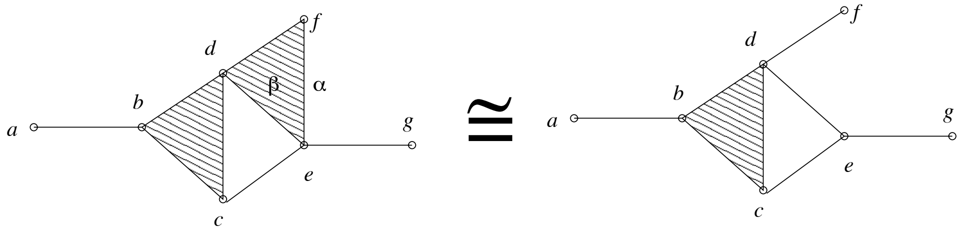


FIG. 2 – Homotopie simple

les faces de α *sont dans* $K \cup \{\alpha\}$*, ou bien sont* β*. Mais* β *ne peut pas être une face de* α*, puisque* $\dim \beta = \dim \alpha + 1$*.*

$K \cup \{\beta\}$ *n'est pas un complexe simplicial, car le simplexe* β *a une face,* α*, qui n'est pas dans* $K \cup \{\beta\}$*.*

Posons $K'' = K \cup \{\alpha\}$*. Posons* β_p *les nombres de Betti de* K*,* β''_p *ceux de* K''*,* β'_p *ceux de* K'*, et de même pour les espaces vectoriels de chaînes, de bords, de cycles, et d'homologie. Posons aussi* p *la dimension de* α *;* β *est alors de dimension* $p+1$*.*

Montrons que α *crée un cycle dans* K*, autrement dit : (a)* $d''_p(\widehat{\alpha})$ *est dans* $\mathrm{Im}\ d_p$*. En effet,* $z = d'_{p+1}(\widehat{\beta})$ *est dans* $B'_p \subset Z'_p$*, et* $Z'_p = Z''_p$ *puisque le seul simplexe en plus dans* K' *par rapport à* K'' *est de dimension* $p+1 \neq p$*. Autrement dit,* z *est un bord de* K'*, donc un cycle de* K'*, et ce cycle n'étant pas de la même dimension que* β*, il s'agit aussi d'un cycle de* K''*. Par définition,* $z = d'_{p+1}(\widehat{\beta})$ *est la somme de* $\pm\widehat{\alpha}$ *et d'un vecteur* x *qui est une combinaison linéaire des autres faces directes de* β*, donc* $\pm\widehat{\alpha} = z - x$*. Donc* $d''_p(\widehat{\alpha})$ *est (au signe près)* $d''_p(z) - d''_p(x)$*. Comme* $z \in Z''_p$*,* $d''_p(z) = 0$*. Comme* x *est dans* C_p*,* $d''_p(x) = d_p(x)$*. Donc* $d''_p(\widehat{\alpha})$ *vaut* $d_p(x)$*, au signe près. Ceci finit de prouver* $d''_p(\widehat{\alpha}) \in \mathrm{Im}\ d_p$*.*

Montrons que β *ne crée pas de cycle dans* $K \cup \{\alpha\}$*, autrement dit : (b)* $d'_{p+1}(\widehat{\beta}) \notin \mathrm{Im}\ d''_{p+1}$*. En effet, sinon* $z = d'_{p+1}(\widehat{\beta})$ *serait dans* $\mathrm{Im}\ d''_{p+1} = B''_p$*. Or* $B''_p = B_p$ *car* $p+1$ *est différent de la dimension* p *du simplexe ajouté,* α*, entre* K *et* K''*. Donc* z *serait dans* B_p*, donc dans* C_p*. Mais* $z = \pm\widehat{\alpha} + x$*, avec* x *dans* C_p*, donc* $\widehat{\alpha}$ *serait dans* C_p*, ce qui est absurde.*

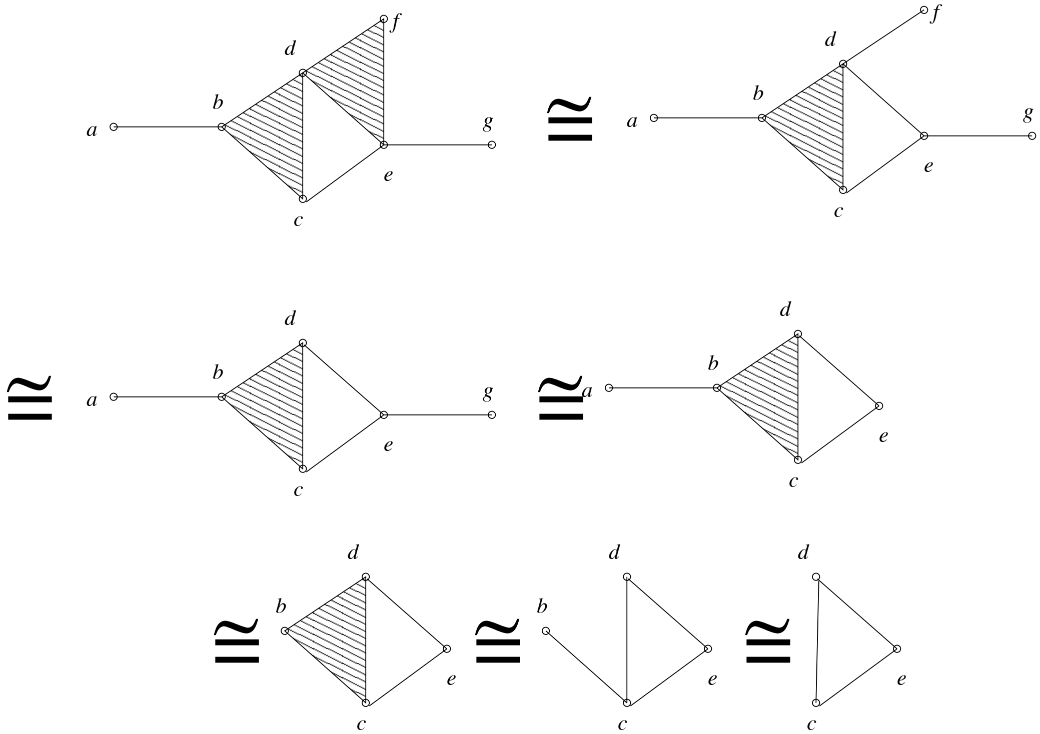
Par la question 3.3 et (a), on a $\beta''_p = \beta_p + 1$*, et* $\beta''_q = \beta_q$ *pour tout* $q \neq p$*. Par la question 3.3 et (b), on a* $\beta'_{p+1-1} = \beta''_{p+1-1} - 1$*, et* $\beta''_q = \beta_q$ *pour tout* $q \neq p+1-1$*. Donc* $\beta'_q = \beta_q$ *pour tout* $q \in \mathbb{N}$*.*

Barême $[3,0]$ **:** $0,5$ *point pour vérifier que* $K \cup \{\alpha\}$ *est un complexe simplicial ;* $0,25$ *point pour vérifier que* $K \cup \{\beta\}$ *n'en est pas un ;* 1 *point pour vérifier que* α *crée un cycle ;* 1 *point pour vérifier que* β *n'en crée pas ;* $0,25$ *pour conclure que* K *et* K' *ont les mêmes nombres de Betti.*

Question 3.5. On note $\cong$ la relation entre complexes simpliciaux définie par $K \cong K'$ si et seulement s'il existe un nombre fini de complexes simpliciaux $K_0 = K$, K_1, …, K_{m-1}, $K_m = K'$ tels que, pour tout i de 1 à m, K_i est obtenu à partir de K_{i-1} en contractant une face, ou K_{i-1} est obtenu à partir de K_i en contractant une face. On dira alors que K et K' sont *simplement homotopes*.

Que peut-on dire des nombres de Betti de deux complexes simpliciaux simplement homotopes ? Quels sont les nombres de Betti, et la caractéristique d'Euler, du complexe simplicial de droite de la figure 1 ?

> *Par récurrence sur i, on montre que K_0 et K_i ont mêmes nombres de Betti, en utilisant la question 3.4.*
>
> *On a la suite de contractions :*



> *Les nombres de Betti du complexe simplicial de droite de la figure 1 sont donc les mêmes que ceux du complexe simplicial de gauche, à savoir $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_q = 0$ pour tout $q \geq 2$. (On vérifie que ces nombres sont indépendants de l'ordre sur les sommet dans ce cas. C'est en fait le cas en général.) De plus, sa caractéristique d'Euler est nulle elle aussi.*
>
> **Barême** $[1,0]$ **:** $0,5$ *point pour le fait que deux complexes simplement homotopes ont même homologie ;* $0,5$ *point pour le fait que le complexe de droite a la même homologie que celui de gauche de la figure 1 (même si ces nombres ne sont pas donnés explicitement). On ne donnera aucun point si le candidat essaie de calculer directement les nombres de Betti du complexe de droite (par un calcul nécessairement monstrueux).*

Total des points pour la partie 3 : $[11,0]$**.**

4 Champs de vecteurs discrets

Pour tout complexe simplicial K, on appelle *champ de vecteurs discret* sur K toute relation binaire $\triangleright$ sur K telle que :

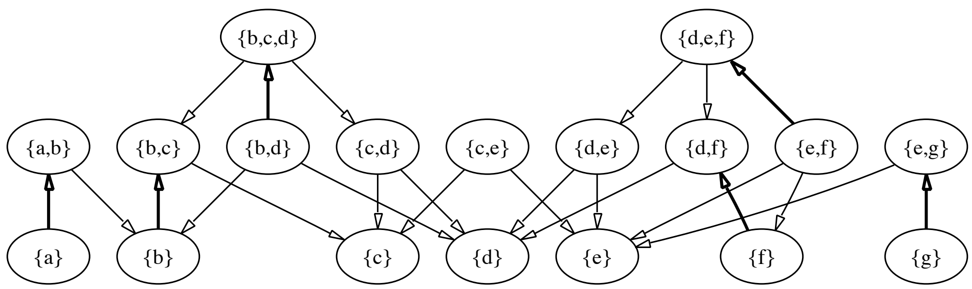
(i) $\alpha \triangleright \beta$ implique que $\alpha \sqsubset \beta$;

(ii) pour tout simplexe α, il existe au plus un simplexe β tel que $\alpha \bowtie \beta$, où $\bowtie$ est la relation définie par $\alpha \bowtie \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$ ou $\beta \triangleright \alpha$.

On pourra vérifier que le complexe simplicial de la droite de la figure 1 a, par exemple, un champ de vecteurs discret défini par :

$$\begin{array}{ccc} \{b\} \triangleright \{b,c\} & \{b,d\} \triangleright \{b,c,d\} & \{a\} \triangleright \{a,b\} \\ \{g\} \triangleright \{e,g\} & \{f\} \triangleright \{d,f\} & \{e,f\} \triangleright \{d,e,f\} \end{array}$$

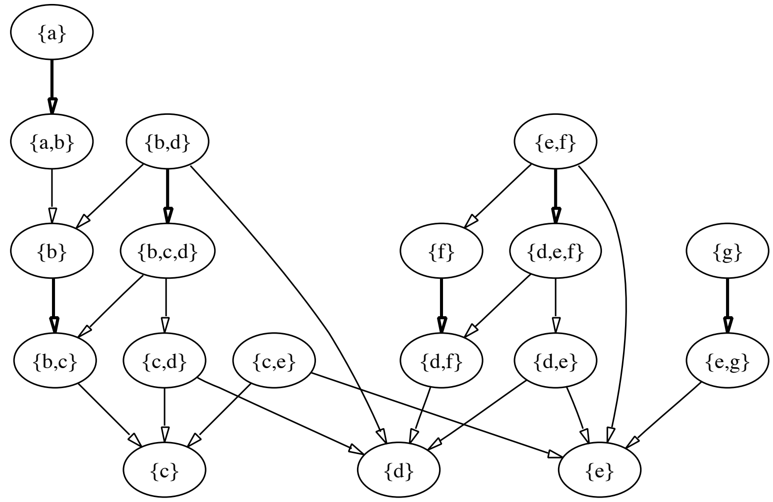
Si $\triangleright$ est un champ de vecteurs discret sur K, on définit la relation binaire $\rightarrowtriangle$ par $\alpha \rightarrowtriangle \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$, ou bien $\alpha \sqsupset \beta$ et $\beta \not\triangleright \alpha$. Dans l'exemple, la relation $\rightarrowtriangle$ est celle décrite dans le diagramme (3) ci-dessous, où l'on trouve une flèche de α vers β si et seulement si $\alpha \rightarrowtriangle \beta$. On observera que la flèche $\alpha \rightarrowtriangle \beta$ monte si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$; on a représenté ces flèches montantes en gras pour mieux les voir.



(3)

On dit que $\triangleright$, ou $\rightarrowtriangle$, est *acyclique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe α_1 tel que $\alpha_1 \rightarrowtriangle^+ \alpha_1$, autrement dit si et seulement s'il n'existe pas de simplexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \geq 1)$ tels que $\alpha_1 \rightarrowtriangle \alpha_2 \rightarrowtriangle \ldots \rightarrowtriangle \alpha_k \rightarrowtriangle \alpha_1$.

On peut réarranger le diagramme (3) comme suit et ainsi constater de visu que le champ de vecteurs discret $\triangleright$ de l'exemple est acyclique :



(4)

Dans le reste de cette partie, on supposera que K est un complexe simplicial fixé, et que $\triangleright$ est un champ de vecteurs discret acyclique sur K.

Question 4.1. On appelle *sous-complexe* K' de K tout sous-ensemble de K qui est un complexe simplicial. Soit A' l'ensemble de tous les simplexes de dimension maximale de K'. On admettra que, $\triangleright$ étant acyclique, pour tout sous-complexe K' non vide de K, il existe un simplexe α dans A' tel qu'il n'y a pas de simplexe γ dans A' avec $\gamma \rightarrowtriangle^{+} \alpha$. On fixera un tel simplexe pour chaque sous-complexe K' non vide, et on le notera $\alpha_{\max}(K')$.

Dans l'exemple ci-dessus, on vérifie que A' contient juste les deux simplexes $\{b, c, d\}$ et $\{d, e, f\}$. On peut constater sur le diagramme (4) que l'on peut choisir indifféremment l'un ou l'autre pour $\alpha_{\max}(K)$.

Un sous-complexe K' sera dit *normal* si et seulement s'il n'existe pas de simplexes $\alpha \in K'$, $\beta \notin K'$ tels que $\alpha \bowtie \beta$.

Soit K' un sous-complexe normal non vide de K, $\alpha = \alpha_{\max}(K')$, et β un simplexe tel que $\alpha \bowtie \beta$. Montrer que β est aussi dans K', que $\beta \triangleright \alpha$, et que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un sous-complexe normal de K.

> *Comme K' est normal et α est dans K', β est aussi dans K'. Notons p la dimension de α, qui est par hypothèse la dimension la plus grande de tous les simplexes de K'.*
>
> *On ne peut pas avoir $\alpha \triangleright \beta$, car ceci impliquerait $\alpha \sqsubset \beta$, donc $\dim \beta > p$, ce qui contredirait le fait que β est dans K'.*
>
> *Donc $\beta \triangleright \alpha$.*
>
> *Nous devons montrer que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un complexe simplicial. Ceci revient à démontrer que, pour tout $\gamma \in K' \setminus \{\alpha, \beta\}$, toutes les faces de γ sont dans*

$K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. Comme toutes les faces de γ sont dans K' puisque K' est un complexe simplicial, ceci revient à démontrer que ni α ni β n'est une face directe de γ.

- *Supposons que $\alpha \sqsubset \gamma$. Alors $\dim \gamma = p + 1$, donc $\gamma \notin K'$ par maximalité de p, contradiction.*
- *Supposons que $\beta \sqsubset \gamma$. Donc $\gamma \sqsupset \beta$. Si on avait $\beta \triangleright \gamma$, on aurait $\alpha = \gamma$ par (ii) et le fait que $\beta \triangleright \alpha$; mais ceci contredit le fait que $\gamma \in K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. Donc $\beta \not\triangleright \gamma$. Comme $\gamma \sqsupset \beta$, on en déduit $\gamma \rightarrowtriangle \beta$. Comme $\beta \triangleright \alpha$, $\beta \rightarrowtriangle \alpha$, donc $\gamma \rightarrowtriangle^+ \alpha$, ce qui contredit la définition de $\alpha = \alpha(K')$.*

Il ne reste qu'à montrer que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est normal. Or si $\alpha' \in K' \setminus \{\alpha, \beta\}$, $\beta' \notin K' \setminus \{\alpha, \beta\}$, et $\alpha' \bowtie \beta'$, alors β' doit être dans K' puisque K' est normal. Donc $\beta' \in \{\alpha, \beta\}$. De plus, par (ii), si $\beta' = \beta$ alors $\alpha' = \alpha$, et si $\beta' = \alpha$ alors $\alpha' = \beta$, ce qui mène dans les deux cas à une contradiction.

Commentaire. *Vérifier que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un sous-complexe normal de K implique de vérifier que c'est un complexe. On doit faire attention à ne pas l'oublier. Ceci se ramène à vérifier que ni α ni β n'est une face directe d'aucun simplexe γ de $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$. C'est évident pour α, un peu moins pour β. La normalité est relativement facile.*

Barême $[3, 0]$ **:** $0,5$ *point pour montrer que β est dans K' et $\beta \triangleright \alpha$ (l'essentiel étant ce dernier résultat) ;* $1,5$ *points pour montrer que $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un sous-complexe ;* $1,0$ *point pour le fait qu'il est normal.*

Question 4.2. Un simplexe α de K est dit *critique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe β de K tel que $\alpha \bowtie \beta$.

Soit K' un sous-complexe normal non vide de K, $\alpha = \alpha_{\max}(K')$. Montrer que, si α est critique, alors $K' \setminus \{\alpha\}$ est un sous-complexe normal de K.

Il est clair que $K' \setminus \{\alpha\}$ est un complexe simplicial : si γ était un simplexe de $K' \setminus \{\alpha\}$ ayant une face hors de $K' \setminus \{\alpha\}$, cette face serait nécessairement α, ce qui contredirait le fait que α est de dimension maximale dans K'.

Pour montrer qu'il est normal, si $\alpha' \in K' \setminus \{\alpha\}$, $\beta' \notin K' \setminus \{\alpha\}$, et $\alpha' \bowtie \beta'$, alors β' doit être dans K' puisque K' est normal. Donc $\beta' = \alpha$, ce qui contredit le fait que α est critique.

Barême $[2, 0]$ **:** 1 *point pour sous-complexe ;* 1 *point pour la normalité.*

Question 4.3. Pour tout sous-complexe normal K' de K, on note $c_p(K')$ le nombre de simplexes critiques de K', et $\beta_p(K')$ le p-ième nombre de Betti de K'. Montrer que l'on a les *inégalités de Morse* :

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K') \geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K')$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, ainsi que l'*égalité de Morse* :

$$\chi(K') = \sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p c_p(K')$$

(Indication : supprimer dans le bon ordre des simplexes de K', en se fondant sur les questions précédentes. On pourra s'aider des résultats de la partie 3.)

Par récurrence sur le cardinal de K'. Si card $K' = 0$, *alors tous les espaces vectoriels de chaînes de K' sont de dimension* 0, *donc* $\beta_p(K') = 0$ *; de plus, clairement* $c_p(K') = 0$ *pour tout* p. *Tous les termes étant nuls, les inégalités et l'égalité de Morse sont évidentes.*

Sinon, soit $\alpha = \alpha_{\max}(K')$.

Si α n'est pas critique, il existe par définition un simplexe β tel que $\alpha \bowtie \beta$. Par (ii), cet élément β est unique. Par la question 4.1, $K'' = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ est un sous-complexe normal de K. Comme card K'' = card $K' - 2 <$ card K', *on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, donc :*

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K'') &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K'') \quad \textit{(pour tout } m\textit{)}\\ \chi(K'') &= \sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p c_p(K'')\end{aligned}$$

Or, par la question 3.4, $\beta_p(K') = \beta_p(K'')$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; en particulier, $\chi(K') = \chi(K'')$. D'autre part, comme $\alpha \bowtie \beta$, ni α ni β n'est critique, donc K' et K'' ont exactement les mêmes simplexes critiques : $c_p(K') = c_p(K'')$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit immédiatement les formules souhaitées :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K') &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K') \quad \textit{(pour tout } m\textit{)}\\ \chi(K') &= \sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p c_p(K')\end{aligned}$$

Si α est critique, par la question 4.2, $K'' = K' \setminus \{\alpha\}$ est un sous-complexe normal. Comme card K'' = card $K' - 1 <$ card K', *on peut appliquer l'hypothèse de* *récurrence, donc :*

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K'') &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K'') \quad (\textit{pour tout } m)\\ \chi(K'') &= \sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^{p}c_p(K'')\end{aligned}$$

Soit p_0 la dimension de α. On a donc $c_p(K') = c_p(K'')$ pour tout $p \neq p_0$, et $c_{p_0}(K') = c_{p_0}(K'')+1$. D'autre part, par la question 3.3, la famille des $(\beta_p(K'))_{p\in\mathbb{N}}$ est obtenue à partir de $(\beta_p(K''))_{p\in\mathbb{N}}$ soit en incrémentant la composante numéro p_0, si α crée un cycle dans K'', soit en décrémentant la composante $p_0 - 1$ sinon (avec $p_0 \geq 1$ dans ce dernier cas).
Si $m < p_0 - 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K') &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K'')\\ &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K'') = \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K')\end{aligned}$$

Si $m = p_0 - 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K') &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K'')\\ &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K'')\\ &= \begin{cases}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K') & \textit{si } \alpha \textit{ crée un cycle dans } K''\\ \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K')+1 & \textit{sinon}\end{cases}\\ &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K')\end{aligned}$$

Si $m \geq p_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K') &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}c_p(K'')+(-1)^{m-p_0}\\ &\geq \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K'')+(-1)^{m-p_0}\\ &= \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\beta_p(K')+(-1)^{m-p_0}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -(-1)^{m-p_0} & \textit{si } \alpha \textit{ crée un cycle dans } K'' \\ +(-1)^{m-(p_0-1)} & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} \beta_p(K')$$

Finalement, on démontre l'égalité de Morse dans le cas où α est critique, de façon similaire :

$$\begin{aligned} \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p c_p(K') &= \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p c_p(K'') + (-1)^{p_0} \\ &= \chi(K'') + (-1)^{p_0} = \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{m-p} \beta_p(K'') + (-1)^{p_0} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{m-p} \beta_p(K') + (-1)^{p_0} \\ & \qquad \begin{cases} -(-1)^{p_0} & \textit{si } \alpha \textit{ crée un cycle dans } K'' \\ +(-1)^{p_0-1} & \textit{sinon} \end{cases} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p \beta_p(K') = \chi(K') \end{aligned}$$

On pouvait aussi ne démontrer que les inégalités de Morse, et en déduire l'égalité de Morse comme suit. Par les inégalités de Morse, $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p c_p(K')$ est supérieur ou égal (si m est pair), ou inférieur ou égal (si m est impair) à $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p \beta_p(K')$. Lorsque m tend vers $+\infty$, cette dernière somme converge vers $\chi(K')$ par le théorème d'Euler-Poincaré. $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p c_p(K')$ converge aussi, puisque les $c_p(K')$ sont tous nuls pour p assez grand. Donc la limite $\sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p c_p(K')$, qui est aussi à la fois la limite des $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p c_p(K')$, m pair tendant vers $+\infty$, et des $\sum_{p=0}^{m} (-1)^p c_p(K')$, m impair tendant vers $+\infty$, est est à la fois supérieure ou égale et inférieure ou égale à $\chi(K')$. D'où l'égalité.

Commentaires. *L'essentiel de l'argument est le suivant : tant qu'il reste un simplexe dans K, éliminer son $\alpha_{\max}$ s'il est critique, éliminer son $\alpha_{\max}$ et l'unique $\beta \bowtie \alpha_{\max}$ sinon, et observer comment les c_p et les β_p évoluent. Ceci demande à la fois une bonne compréhension des champs de vecteurs discrets, et d'avoir le courage de se lancer dans des calculs d'inégalités et d'égalites.*

Barême $[6, 0]$ **:** 3 *points si bien trouvé l'idée, c'est-à-dire dans quel ordre et combien de simplexes éliminer à chaque tour.* 2 *points si les inégalités sont bien démontrées, avec un traitement correct de chacun des cas.* 1 *point pour l'égalité de Morse si les inégalités ont été démontrées,* 2 *sinon (il y a du partage entre les inégalités et les égalités, le total des deux compte pour* 3 *points).*

Question 4.4. En appliquant le résultat précédent au cas $K' = K$, en déduire les *inégalités de Morse faibles* :

$$c_p(K) \geq \beta_p(K)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La question précédente implique :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} c_p(K) &\geq \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} \beta_p(K) \\ \chi(K) &= \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p c_p(K) \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, car K est un sous-complexe normal de K. (C'est évident.) L'inégalité de Morse faible est juste l'inégalité de Morse quand $p = 0$. Si $p \geq 1$, il suffit de sommer les inégalités de Morse pour $m = p$ et pour $m = p - 1$, et l'on obtient $c_p(K) \geq \beta_p(K)$.

Barème $[2, 0]$ **:** 2 *points.*

Total des points pour la partie 4 : $[13, 0]$**.**

5 Évasivité

Soit $(V, \leq, K)$ un complexe simplicial fixé, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$, $n \geq 1$.

Le but de cette partie est d'examiner la possibilité d'écrire un programme prenant en entrée un sous-ensemble α de V et retournant VRAI si α est un simplexe de K, FAUX sinon.

On se limite à des programmes qui procèdent uniquement en posant des *questions* de la forme "est-ce que $v_i \in \alpha$?" ($1 \leq i \leq n$), et selon la réponse, vrai ou faux, posera d'autre questions, jusqu'à décider de retourner VRAI ou FAUX. Un tel programme sera appelé un *reconnaisseur* REC_K (α) pour K.

Un reconnaisseur sera estimé efficace s'il peut décider si $\alpha \in K$, pour tout $\alpha \subset V$, en posant strictement moins de n questions. Pour chercher un reconnaisseur efficace pour K, on va jouer sur l'ordre dans lequel il pose les questions.

On associera à chaque reconnaisseur REC_K une application qui à tout sous-ensemble α de V associe une permutation σ_α de $\{1, 2, \ldots, n\}$, vérifiant la propriété :

(‡) pour tout $\alpha \subset V$, si $v_{\sigma_\alpha(k)} \in \alpha$ et $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(k)}\}$ $(1 \leq k \leq n)$ alors $\sigma_\beta(j) = \sigma_\alpha(j)$ pour tout j, $1 \leq j \leq k$.

La façon de construire l'application $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$ à partir de REC_K est la suivante. Supposons que, pour décider si $\alpha \in K$, REC_K pose comme première question "est-ce que $v_{i_1} \in \alpha$?", alors on pose $\sigma_\alpha(1) = i_1$. Ensuite, si REC_K pose comme deuxième question "est-ce que $v_{i_2} \in \alpha$?", alors on pose $\sigma_\alpha(2) = i_2$, et ainsi de suite. Intuitivement, RED_K ne va pas poser deux fois la même question, ce qui fait de σ_α une permutation. La condition *(‡)* exprime que si l'on doit poser une série de questions pour reconnaître α, et si β ne diffère de α qu'à partir de la $k$ième question, alors on aurait posé les mêmes k premières questions pour reconnaître β.

Dans la suite, on fixera un reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$. On note σ_α la famille de permutations vérifiant *(‡)* qui lui est associée.

On définit $\triangleright$ par $\beta \triangleright \alpha$ si et seulement si $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$ et $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$. (On rappelle que n est le nombre de sommets de K.) Comme précédemment, on définit $\bowtie$ par $\alpha \bowtie \beta$ si et seulement si $\alpha \triangleright \beta$ ou $\beta \triangleright \alpha$.

Question 5.1. Montrer que pour tout $\alpha \subset V$, il existe un unique $\beta \subset V$ tel que $\alpha \bowtie \beta$.

> *Clairement $\alpha \bowtie \beta$ implique que $\beta = \alpha \,\Delta\, \{v_\sigma(n)\}$, où Δ est la différence symétrique, et σ est σ_α ou σ_β. Mais la condition (‡) avec $k = n$ implique que si β est inclus dans α alors $\sigma_\beta = \sigma_\alpha$, et si α est inclus dans β alors $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$. Donc, dans tous les cas, $\beta = \alpha \,\Delta\, \{v_{\sigma_\alpha}(n)\}$, d'où l'unicité.*
>
> *Existence : posons $\beta = \alpha \,\Delta\, \{v_{\sigma_\alpha}(n)\}$. Si $v_{\sigma_\alpha}(n) \in \alpha$, alors $\beta \triangleright \alpha$. Sinon, $v_{\sigma_\alpha}(n) \in \beta$, et par (‡) avec $k = n$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$, donc $v_{\sigma_\beta}(n) \in \beta$, d'où $\alpha \triangleright \beta$.*
>
> **Barême** $[2, 0]$ **:** 1 *point pour l'existence,* 1 *point pour l'unicité.*

Question 5.2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies $[n_1, \ldots, n_k]$ $(k \geq 0)$ d'entiers naturels. On appelle k la *longueur* de la suite $[n_1, \ldots, n_k]$. La suite $[]$ de longueur nulle est la *suite vide*. On définit la relation binaire $\prec$ sur $\mathcal{S}$ par $[n_1, \ldots, n_k] \prec [n'_1, \ldots, n'_\ell]$ si et seulement s'il existe j, $1 \leq j \leq k$ satisfaisant les conditions **(a)** et **(b)** :

(a) pour tout i, $1 \leq i < j$, $n_i = n'_i$;

(b) $\ell = j - 1$, ou bien $\ell \geq j$ et $n_j < n'_j$;

Montrer que $\prec$ est un ordre strict, c'est-à-dire une relation irréflexive et transitive.

> *Supposons $[n_1, \ldots, n_k] \prec [n_1, \ldots, n_k]$. Alors il existe j, $1 \leq j \leq k$, tel que $k = j - 1$ (ce qui est impossible) ou bien $k = j$ et $n_j < n'_j$ (ce qui est aussi impossible). Donc $\prec$ est irréflexive.*
>
> *Supposons $[n_1, \ldots, n_k] \prec [n'_1, \ldots, n'_\ell]$, et $[n'_1, \ldots, n'_\ell] \prec [n''_1, \ldots, n''_m]$. Il existe donc j, j' avec :*
>
> 1. *$1 \leq j \leq k$, $1 \leq j' \leq \ell$;*
> 2. *$\ell = j - 1$, ou bien $\ell \geq j$ et $n_j < n'_j$;*
> 3. *et pour tout i, $1 \leq i < j$, $n_i = n'_i$.*
> 4. *$m = j' - 1$, ou bien $m \geq j'$ et $n'_{j'} < n''_{j'}$;*
> 5. *et pour tout i', $1 \leq i' < j'$, $n'_{i'} = n''_{i'}$.*
>
> *Si $j < j'$, on ne peut pas avoir $\ell = j - 1$, sinon $\ell < j' - 1$, ce qui contredit* **(b)** *(précisément, $j' \leq \ell'$). Donc $\ell \geq j$ et $n_j < n'_j$, par* **(a)**. *Par d., $m \geq j' - 1 \geq j$. De plus, $n_j < n'_j = n''_j$ puisque $j < j'$, par e. Finalement, pour tout i tel que $1 \leq i < j$, par c., $n_i = n'_i$ et par e., $n'_i = n''_i$ puisque $i < j < j'$, donc $n_i = n''_i$. Donc $[n_1, \ldots, n_k] \prec [n''_1, \ldots, n''_m]$.*

Si $j' \leq j$, pour tout i tel que $1 \leq i < j'$, par c., $n_i = n'_i$ puisque $i < j' \leq j$, et par e., $n'_i = n''_i$, donc $n_i = n''_i$. Montrons que $m = j' - 1$, ou $m \geq j'$ et $n_{j'} < n''_{j'}$. Par d., $m \geq j' - 1$, et si $m \geq j'$, alors $n'_{j'} < n''_{j'}$. Si $j' < j$, alors $n_{j'} = n'_{j'}$ (par c.) $< n''_{j'}$. Si $j' = j$, comme $\ell \geq j'$ par **(b)**, *$\ell \geq j$, donc par* **(a)**, *$n_j < n'_j$, donc $n_{j'} < n'_{j'} < n''_{j'}$. Dans les deux cas, $n_{j'} < n''_{j'}$.*

Barême $[2,0]$ **:** $0,5$ *point pour l'irréflexivité ;* $1,5$ *pour la transitivité.*

Question 5.3. Pour tout $\alpha \subset V$, on pose $\breve{\alpha} = \alpha \,\Delta\, \{v_{\sigma_\alpha}(n)\}$, où Δ dénote la différence symétrique. On pose d'autre part $[\![\alpha]\!]$ la suite croissante des indices i, $1 \leq i \leq n$, tels que $v_{\sigma_\alpha(i)} \in \alpha$. (Par exemple, si $n = 3$, $\alpha = \{v_1, v_2\}$, $\sigma_\alpha = \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1\}$, alors $[\![\alpha]\!]$ est $[2,3]$.)

Montrer que $\beta \rightharpoondown \alpha$ implique $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$. En déduire que $\triangleright$ est un champ de vecteur discret acyclique sur K.

Montrons d'abord que : $(*)$ si $\alpha \sqsupset \beta$, alors $[\![\alpha]\!] \prec [\![\beta]\!]$. Comme $\alpha \sqsupset \beta$, il existe k tel que $v_{\sigma_\alpha(k)} \in \alpha$ et $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(k)}\}$. Par (‡), σ_β coincide avec σ_α sur $\{1, \ldots, k\}$. Donc $[\![\alpha]\!]$ est une suite de la forme $[n_1, \ldots, n_{\ell-1}, n_\ell, \ldots]$, et $[\![\beta]\!]$ est égal à $[n_1, \ldots, n_{\ell-1}, m_1, \ldots, m_p]$ avec les mêmes $n_1, \ldots, n_{\ell-1}$, et $n_\ell = v_{\sigma_\alpha(k)} < m_1 < \ldots < m_p$. Donc $[\![\alpha]\!] \prec [\![\beta]\!]$.

Si $\beta \triangleright \alpha$ alors $\breve{\beta} = \alpha \sqsupset \beta = \breve{\alpha}$. Par $(*)$, $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$.

Si $\beta \sqsupset \alpha$ et $\alpha \not\triangleright \beta$, alors comme $\beta \sqsupset \alpha$, il existe k, $1 \leq k \leq n$, tel que $v_{\sigma_\beta(k)} \in \beta$ et $\alpha = \beta \setminus \{v_{\sigma_\beta(k)}\}$. Comme $\alpha \not\triangleright \beta$, soit $v_{\sigma_\beta(n)} \notin \beta$ (ce qui implique que $k \neq n$, car $v_{\sigma_\beta(k)} \in \beta$), soit $\alpha \neq \beta \setminus \{v_{\sigma_\beta(n)}\}$ (ce qui implique que $k \neq n$, car $\alpha = \beta \setminus \{v_{\sigma_\beta(k)}\}$). Dans les deux cas, $k \neq n$. Il s'ensuit que $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right]$ est de la forme $[n_1, \ldots, n_{\ell-1}, n_\ell, \ldots]$, et $[\![\breve{\alpha}]\!]$ est égal à $[n_1, \ldots, n_{\ell-1}, m_1, \ldots, m_p]$ avec les mêmes $n_1, \ldots, n_{\ell-1}$, et $n_\ell = v_{\sigma_\beta(k)} < m_1 < \ldots < m_p$. Donc $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$.

Ceci finit de prouver que $\beta \rightharpoondown \alpha$ implique $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$.

La condition (i) est par construction : on a bien $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(n)}\} \sqsubset \alpha$ puisque $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$. La condition (ii) est par la question 5.1. Finalement, si $\alpha \rightharpoondown^+ \alpha$, par la première partie de la question, $[\![\breve{\alpha}]\!] \prec^+ [\![\breve{\alpha}]\!]$. Comme $\prec$ est un ordre strict, $\prec^+ = \prec$, donc $[\![\breve{\alpha}]\!] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$, ce qui contredit l'irréflexivité de $\prec$. Donc $\triangleright$ est acyclique.

Barême $[4,0]$ **:** 1 *point pour montrer que $\beta \triangleright \alpha$ implique $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$;* $1,5$ *points pour montrer que si $\beta \sqsupset \alpha$ et $\alpha \not\triangleright \beta$, alors $\left[\!\!\left[\breve{\beta}\right]\!\!\right] \prec [\![\breve{\alpha}]\!]$; (i) vaut* $0,25$*, (ii) vaut aussi* $0,25$ *; l'acyclicité vaut* 1 *point.*

Question 5.4. Un sous-ensemble α non vide de V est *évasif* si et seulement si $\alpha \in K$ et $\breve{\alpha} \notin K \cup \{\emptyset\}$, ou bien $\alpha \notin K \cup \{\emptyset\}$ et $\breve{\alpha} \in K$.

Le reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$ est *inefficace* si et seulement s'il existe un sous-ensemble α évasif. Il est *efficace* sinon. L'idée est que $\textsc{Rec}_K$ est inefficace si et seulement s'il y a un simplexe α non vide tel que, pour décider si α est dans K, on est obligé de poser toutes les questions jusqu'à la dernière. Aucun reconnaisseur ne teste jamais l'appartenance de l'ensemble vide à K ; ceci est dû au fait que l'ensemble vide n'est jamais dans K, et justifie la définition.

Soient β_p les nombres de Betti de K.

Montrer le *théorème de Kahn-Saks-Sturtevant* : quel que soit le reconnaisseur $\textsc{Rec}_K$ pour K, il y a au moins $2\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p - 1\right)$ sous-ensembles évasifs pour $\textsc{Rec}_K$. En déduire que ceci implique qu'il n'existe aucun reconnaisseur efficace pour K dès que $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p \geq 2$. On pourra utiliser la question 4.4.

Les complexes simpliciaux de la figure 1 ont-ils des reconnaisseurs efficaces ?

Par la question 5.1, pour tout $\alpha \subset V$, $\breve{\alpha}$ est l'unique $\beta \subset V$ tel que $\alpha \bowtie \beta$.

Les simplexes α de K qui sont évasifs sont exactement ceux tels que $\breve{\alpha}$ n'est pas dans K, sauf $\breve{\emptyset}$ si ce dernier est dans K. Or les simplexes critiques de K sont exactement les α tels que $\breve{\alpha}$ n'est pas dans K. Donc le nombre de simplexes évasifs est au moins le nombre de simplexes critiques moins un. Par la question 4.4, il y a au moins $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p$ simplexes critiques dans K, donc au moins $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p - 1$ simplexes évasifs dans K.

Notons que si α est un simplexe évasif, alors $\breve{\alpha}$ est un non-simplexe évasif, et réciproquement. Il y a donc exactement deux fois plus de sous-ensembles évasifs que de simplexes évasifs, d'où la formule.

Finalement, un reconnaisseur efficace n'a aucun sous-ensemble évasif, ce qui implique $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p \leq 1$. D'où le fait que si $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p \geq 2$, alors K n'a aucun reconnaisseur efficace. On en déduit que les complexes simpliciaux de la figure 1 n'ont aucun reconnaisseur efficace : celui de gauche est tel que $\sum_{p\in\mathbb{N}}\beta_p = 1 + 1 \geq 2$, et celui de droite est simplement homotope au précédent, donc vérifie la même propriété.

Barême $[3,0]$ **:** $2,5$ *points pour le théorème de Kahn-Saks-Sturtevant ;* $0,5$ *pour conclure que l'un ou l'autre des complexes de la figure 1 n'a aucun reconnaisseur efficace.*

Total des points pour la partie 5 : $[11,0]$**.**

Total général des points : $[4,5+5,5+11+13+11=45]$**.**

NB. : après correction, étant donnée la bonne tenue des copies MP, toutes les notes de la série MP ont été multipliées par 0,8 ; autrement dit les copies MP ont été effectivement notées sur 36*. Les notes de la série PC ont été multipliées, elles, par 1,4, elles ont donc été notées effectivement sur* 63*.*