

TD 12

Langages Formels, Calculabilité et Complexité

Exercice 1:

On rappelle que $\text{EXPSPACE} = \bigcup_k \text{SPACE}(2^{n^k})$. On considère une généralisation des expressions régulières, c'est-à-dire des expressions qui sont construites à partir de $\emptyset, \varepsilon$, et des éléments d'un alphabet A en utilisant les opérations rationnelles : union ($\cup$), concaténation ($\circ$), itération ($*$) et exponentiation ($\uparrow$). Si R est une expressions régulières et k un entier positif, l'écriture $R \uparrow k$ est équivalente à la concaténation de R k fois. On peut aussi écrire R^k pour $R \uparrow k$. Il est clair que les expressions régulières et les expressions régulières généralisées génèrent la même classe des langages rationnels car on peut éliminer une exponentiation en utilisant plusieurs concaténations.

- (a) Donner un algorithme non-déterministe en espace linéaire qui décide le langage $\text{ALL}_{\text{NFA}} = \{\langle M \rangle : M \text{ est un automate fini non-deterministe et } L(M) = A^*\}$ où A est l'alphabet d'entrée.
- (b) Montrer que le problème de tester l'équivalence de deux expressions régulières sans opérateur exponentiation est résoluble en espace polynomial.

$$\text{EQ}_{\text{REX}} = \{\langle R, S \rangle : R \text{ et } S \text{ sont des expressions regulieres equivalentes}\} \in \text{PSPACE}.$$

- (c) Montrer que

$$\text{EQ}_{\text{REX}\uparrow} = \{\langle R, S \rangle : R \text{ et } S \text{ sont des expressions regulieres equivalentes}\}$$

est EXPSPACE -complet.

Exercice 2: Machine de Turing à oracle

Un oracle A est un langage. Une Machine de Turing à oracle M^A est une MT ordinaire avec une bande spéciale, appelée bande de l'oracle. Quand M écrit une chaîne w sur la bande de l'oracle, la machine apprend si w appartient à A en une étape de calcul.

On note P^A la classe des langages décidables par une MT à oracle en temps polynomial qui utilise l'oracle A . On définit de manière similaire NP^A . Par exemple, $\text{NP} \subseteq \text{P}^{\text{SAT}}$ et de même $\text{co-NP} \subseteq \text{P}^{\text{SAT}}$ car P^{SAT} est clos par complémentation.

- (a) Deux formules booléennes sur le même ensemble de variables sont *équivalentes* si elles ont la même valeur pour tout assignation des variables. On dit qu'une formule booléenne est *minimale* s'il n'y a pas de formule équivalente de taille plus petite. Soit

$$\text{NONMIN-FORMULA} = \{\langle \phi \rangle : \phi \text{ n'est pas une formule booleenne minimal}\}$$

Montrer que $\text{NONMIN-FORMULA} \in \text{NP}^{\text{SAT}}$. (Il ne semble pas que NONMIN-FORMULA appartienne à NP .)

- (b) Montrer qu'il existe un oracle A tel que $P^A = NP^A$.
- (c) Montrer qu'il existe un oracle B tel que $P^B \neq NP^B$.