

TD 1

Langages Formels, Calculabilité et Complexité

Exercice 1: Mots de Lukasiewicz

On appelle *mot* toute suite finie d'entiers $u = (u_1, \dots, u_n)$, où $n \geq 1$ et où $u_i \in \{-1, 1\}$ pour $i = 1, \dots, n$. L'entier n est la longueur de u .

Un mot $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un *mot de Lukasiewicz* si

$$\sum_{i=1}^n u_i = -1 \text{ et } \sum_{i=1}^k u_i \geq 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1$$

Un *pic* du mot $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un entier i ($1 \leq i \leq n-2$) tel que $u_i = 1$ et $u_{i+1} = u_{i+2} = -1$. On définit une fonction ρ qui à un mot $u = (u_1, \dots, u_n)$ associe un mot $\rho(u)$ de la manière suivante:

$\rho(u) = u$, si u n'a pas de pic

$\rho(u) = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+2}, \dots, u_n)$, si u a un pic et si i est le plus petit pic de u

Soit ρ^* la fonction définie pour un mot u par $\rho^*(u) = \rho^m(u)$, où m est le plus petit entier ≥ 0 tel que $\rho^m(u) = \rho^{m+1}(u)$. (On pose $\rho^{m+1} = \rho \circ \rho^m$.)

1. Démontrer que u est un mot de Lukasiewicz si et seulement si $\rho^*(u) = (-1)$.
2. Démontrer que si $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_m)$ sont des mots de Lukasiewicz, alors $(1, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$ est un mot de Lukasiewicz.
3. Démontrer réciproquement, si $w = (w_1, \dots, w_n)$ est un mot de Lukasiewicz et $n > 1$, alors $w_1 = 1$ et il existe un unique couple $u = (u_1, \dots, u_m)$ et $v = (v_1, \dots, v_k)$ de mots de Lukasiewicz tels que

$$w = (1, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)$$

Les mots u et v sont appelés le *fil gauche* et le *fil droit* de w .

4. Montrer que si u et v sont deux mots non nuls, alors les conditions suivantes sont équivalentes:
 - (a) $uv = vu$;
 - (b) il existe deux entiers $n, m \geq 1$, tels que $u^n = v^m$;
 - (c) il existe un mot w non vide et deux entiers $k, \ell \geq 1$ tels que $u = w^k$ et $v = w^\ell$.

5. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un mot tel que $\sum_{i=1}^n u_i = -1$. Démontrer qu'il existe un unique i , avec $1 \leq i \leq n$ tel que $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_n, u_1, \dots, u_{i-1})$ soit un mot de Lukasiewicz. En déduire que le nombre c_k de mots de Lukasiewicz de longueur $2k + 1$ est

$$\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Exercice 2: Mots de Lyndon

On appelle *mot* toute suite finie d'entiers $u = (u_1, \dots, u_n)$, où $n \geq 1$ et où $u_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \dots, n$. L'entier n est la longueur de u .

On pose $u \prec v$ si u est un préfixe de v ou s'il existe un entier k tel que $u_i = v_i$ pour $i = 1, \dots, k - 1$ et $u_k < v_k$. La relation \preceq définie par $u \preceq v$ si et seulement si $u = v$ ou $u \prec v$ s'appelle l'ordre lexicographique.

Un *conjugué* d'un mot $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un mot de la forme $v = (u_i, \dots, u_n, u_1, \dots, u_{i-1})$ avec $2 \leq i \leq n$. Un mot u est un *mot de Lyndon* si $u \prec v$ pour tout conjugué v de u . Clairement, un mot de longueur 1 est un mot de Lyndon.

1. Démontrer que pour deux mots $u \neq v$, on a soit $u \prec v$, soit $v \prec u$.
2. Soit u un mot. Démontrer que s'il existe un mot qui est à la fois un préfixe et un suffixe de u , alors u n'est pas un mot de Lyndon.
3. Démontrer qu'un mot u est un mot de Lyndon si et seulement si pour tout suffixe h de u , on a $u \prec h$.
4. Démontrer que si un mot u de longueur > 1 est un mot de Lyndon, il existe deux mots de Lyndon f et g tels que $u = fg$ et $f \prec g$ et, réciproquement, si f et g sont des mots de Lyndon tels que $f \prec g$, alors fg est un mot de Lyndon.
5. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un mot. Une *factorisation de Lyndon* du mot u est une séquence $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)}$ de mots de Lyndon telle que

$$u = u^{(1)}u^{(2)} \dots u^{(p)} \text{ et } u^{(1)} \succeq u^{(2)} \succeq \dots \succeq u^{(p)}.$$

Proposer un algorithme pour calculer une factorisation de Lyndon.

6. Démontrer que tout mot possède une factorisation unique de Lyndon.